PROGRAMACIÓN
DE PROYECTOS

# AJUSTES COSTES–TIEMPO

J. Alcalá

*Departamento de Ingeniería de la Construcción
y de Proyectos de Ingeniería Civil*

Programación de Proyectos
AJUSTES COSTE—TIEMPO


Julián Alcalá González jualgon@upv.es

Departamento de Ingeniería de la Construcción
y de Proyectos de Ingeniería Civil
Ref.: 0023-0056-PRC-01061-0017
Documento elaborado en LaTeX

# Índice

*(Página intencionadamente dejada en blanco)*

# 1. Introducción

La duración de cada actividad de una obra viene dada por la medición y el rendimiento de los medios puestos para su realización. Los recursos puestos a disposición de una actividad generan un coste que suele estar relacionado con el rendimiento de esos recursos: a mayor rendimiento mayor coste. Por eso es frecuente que si se pretende acelerar el trabajo aumentando la intensidad de los medios empleados, se incrementarán los costes del proyecto. Es responsabilidad de los gestores de la obra la elección de los medios que optimicen los costes cumpliendo plazos, siendo estas dos condiciones excluyentes entre sí, diseñando un programa de trabajos que considere los costes para los posibles escenarios que se puedan dar.

Además hay que tener en cuenta que los costes asociados a los equipos de producción son solamente los costes directos, pero el coste total de un proyecto es la suma del coste directo y del coste indirecto, siendo éste creciente con la duración de las obras. A menor duración menor coste indirecto pero, normalmente, mayor coste directo. Conseguir un plazo que minimice la suma de ambos es el objetivo de los ajustes coste-tiempo.

# 2. Variación de los costes directos

La relación entre el coste y el tiempo se puede representar como se muestra en la figura 1. Normalmente esta relación no se conoce con precisión, pero si se conociese, se podría definir una metodología que permite obtener el coste óptimo. Obsérvese que en esa figura hay una duración máxima $T_1$ (asociada a un coste $C_1$) a partir de la cual el coste no disminuye, por lo que no tendría sentido programar la actividad con duraciones superiores pues se incrementan los costes con duraciones mayores, y una duración mínima $T_2$, (asociada a un coste máximo $C_2$) que no es posible reducir por limitaciones de la técnica constructiva, o por la cantidad y naturaleza de recursos disponibles.

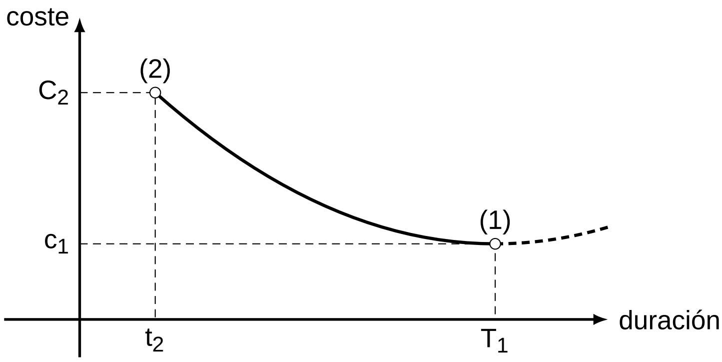



Figura 1: Relación coste directo – duración de una actividad.

En este texto se va a suponer que hay proporcionalidad en la relación entre la duración y los costes de las actividades, para poder abordar el problema con una formulación lineal del problema, pero en la que los principios aplicables son perfectamente válidos para otro tipo de relaciones. Así se va a suponer que la relación coste-tiempo viene dada por una linea recta, como la representada en la figura 2.

Los puntos que marcan estos límites son (figura 2):

(1) Punto «normal», de máxima duración $t_1$ con un coste $C_1$.

(2) Punto «tope», de máximo coste directo $c_2$ con una duración $T_2$.

La pendiente de la recta (1)–(2) vendría dada por:

$$p_{1-2} = \frac{C_2 - c_1}{t_2 - T_1} = \frac{\Delta C}{\Delta T} \tag{1}$$

Pero como así la pendiente siempre es negativa en lo que sigue se va a tomar el valor positivo de la pendiente, es decir:

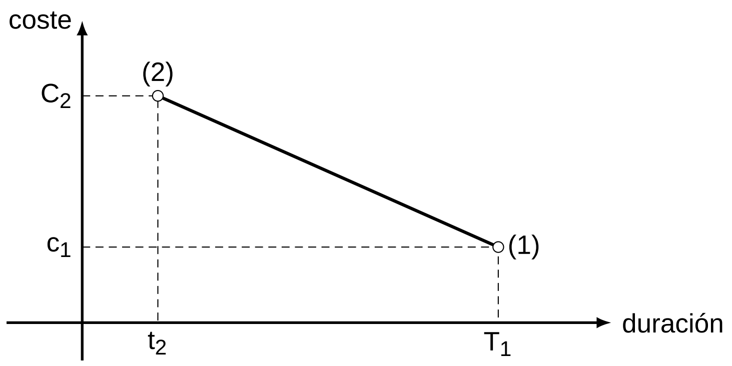



Figura 2: Relación coste directo – duración de una actividad.

$$\frac{\Delta C}{\Delta T} = -\frac{C_2 - c_1}{t_2 - T_1} = \frac{C_2 - c_1}{T_1 - t_2} \tag{2}$$

La pendiente así definida proporciona el ahorro de coste por unidad de tiempo, y va a servir como índice comparativo de prioridad en la elección de las actividades en las que pueda obtenerse mayor reducción –o aumento de su coste unitario– al variar su duración.

Supongamos como ejemplo, las actividades representadas en la figura 3. Si ambas estuvieran programadas con sus duraciones mínimas y se aumentaran en 3 semanas, este incremento originaría en cada actividad el siguiente ahorro:

$$\Delta C_A = 3 \cdot p_A = 3\frac{300 - 100}{5 - 1} = 150$$

$$\Delta C_B = 3 \cdot p_B = 3\frac{600 - 200}{7 - 3} = 300$$

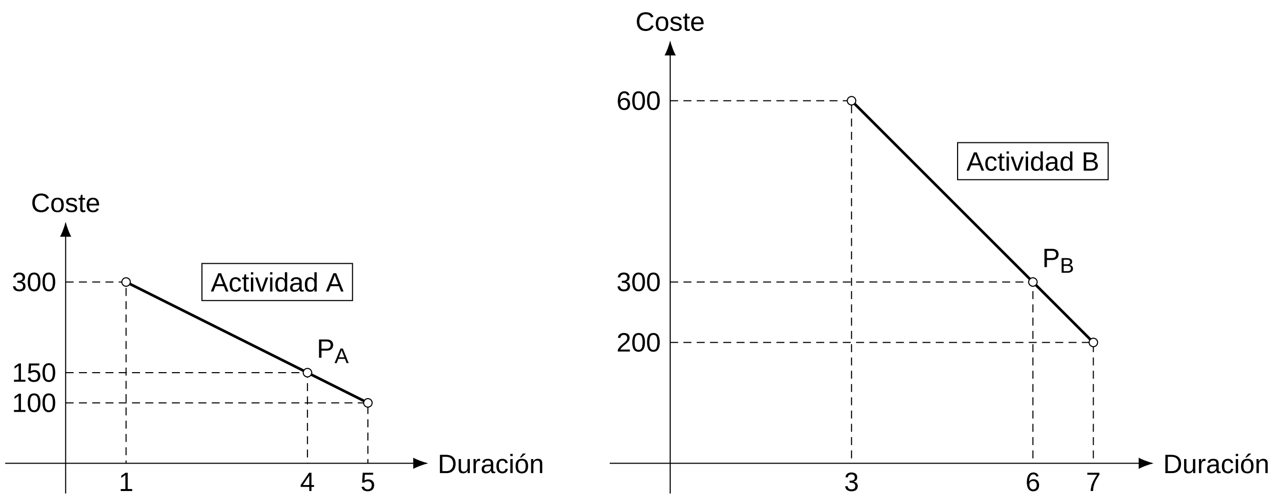



Figura 3: Curvas coste–tiempo de dos actividades.

Los costes directos en la nueva programación, (puntos $P_A$ y $P_B$) serían:

$$C_A = 300 - \Delta C_A = 150$$

$$C_B = 600 - \Delta C_B = 300$$

Es evidente que para reducir costes directos es preferible aumentar la duración en la actividad B porque el ahorro de coste es superior.

Por el contrario, si lo que se pretende es acelerar el proyecto con el menor sobrecoste posible, es mejor hacerlo sobre la actividad A (suponiendo que ambas actividades son críticas), porque el incremento de coste asociado es menor.

En función del planteamiento del problema debe actuarse de forma prioritaria en unas u otras actividades, como se verá a continuación.

# 3. Reducción de costes directos

La disminución de los costes directos de ejecución provocará un incremento en la duración de algunas actividades, lo cual puede plantearse de dos formas:

1. Sin variación del plazo del proyecto.
2. Con el retraso de dicho plazo.

El primer caso se dará cuando la reducción de costes directos se aplique a las actividades no críticas. Esta optimización se efectuará entonces reduciendo las holguras de las actividades que sea necesario, priorizando las actividades cuya proporción $\frac{\Delta C}{\Delta T}$ sea mayor, ya que en estas actividades el ahorro de costes es mayor a igualdad de aumento de duración.

El segundo caso se plantea una vez se han prolongado todas las actividades no críticas. En este caso las nuevas reducciones de costes directos que se obtengan provocarán necesariamente el incremento del plazo final de ejecución. En este caso, como en el anterior, las actividades que habrá que ralentizar preferentemente serán las que en la curva de costes–tiempos tengan mayor inclinación, ya que en ellas un aumento de plazo proporcionará un menor incremento de coste.

## 3.1. Criterios aplicables

En base a las consideraciones anteriores, la reducción de los costes directos de cualquier programación, debe hacerse de acuerdo con los siguientes criterios:

1. Si el plazo final de la obra no ha de retrasarse, la optimización ha de aplicarse únicamente sobre actividades no críticas, reduciendo parte de sus duraciones dentro de los intervalos que definan sus holguras.
2. Se tomarán prioritariamente las actividades cuya relación $\frac{\Delta C}{\Delta T}$ sea mayor.
3. Han de considerarse todas las formas posibles de combinar las actividades optimizables y aplicando el criterio anterior, elegir la que proporcione un ahorro global de costes mayor.
4. Por supuesto, los incrementos de duración que se apliquen sobre cualquier actividad no deben sobrepasar el límite máximo fijado en la correspondiente curva de costes–tiempos.

## 3.2. Algoritmo de optimización

Para crear un modelo de optimización con los criterios establecidos que proporcione la máxima reducción de costes directos, se debe comenzar por definir la función a optimizar.

Designemos por $p_{ij}$ la pendiente (en valor positivo) de la recta costes-tiempos, por $C_{ij}$ el coste directo que se quiere reducir en cada actividad $A_{ij}$, y por $r_{ij}$ la magnitud de esta reducción. Con la notación de la figura 4 se tiene:

$$p_{ij} = -\frac{C_{ij} - c_{ij}}{T_{ij} - t_{ij}}$$

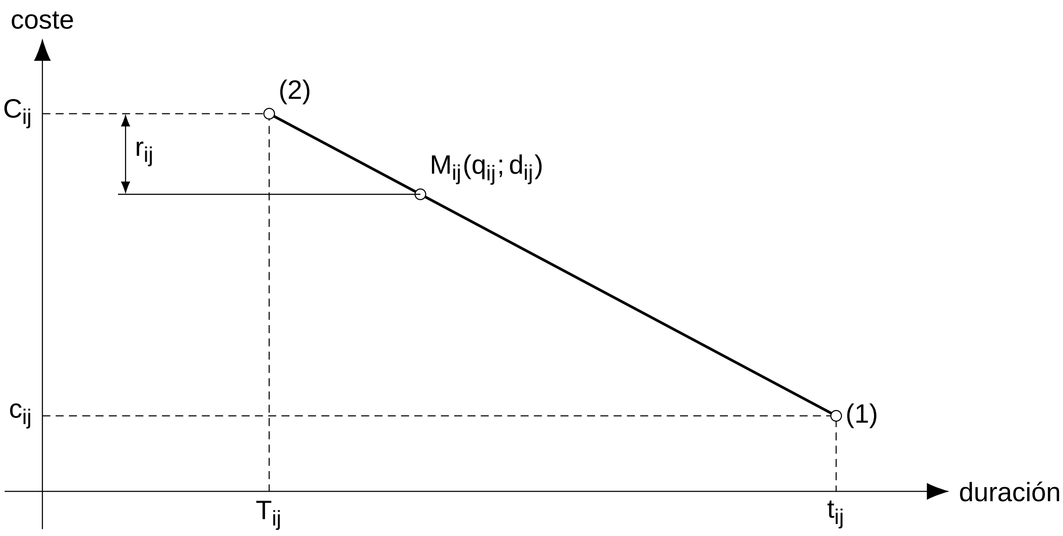



Figura 4: Relación coste directo – duración de una actividad.

La reducción de costes en una actividad al prolongar su duración será: $r_{ij} = p_{ij}\left(d_{ij} - T_{ij}\right)$ con la condición:

$$0 < t_{ij} \leq d_{ij} \leq T_{ij} \tag{3}$$

Los costes totales de la obra se pueden obtener sumando los de las actividades en sus puntos $M_{ij}$:

$$\phi = \sum_{(i,j)\in\mathbb{R}} \left[C_{ij} - p_{ij}\left(d_{ij} - T_{ij}\right)\right] \tag{4}$$

en la cual $(i, j) \in \mathbb{R}$ representa la extensión del sumatorio a todos los arcos (i,j) de la red. Teniendo en cuenta que $C_{ij}$, $T_{ij}$ y $p_{ij}$ son valores constantes, la función puede expresarse de la forma:

$$\phi = \sum_{(i,j)\in\mathbb{R}} C_{ij} + \sum_{(i,j)\in\mathbb{R}} p_{ij} \times T_{ij} - \sum_{(i,j)\in\mathbb{R}} p_{ij} \times d_{ij} = K - \sum_{(i,j)\in\mathbb{R}} p_{ij} \times d_{ij} \tag{5}$$

Minimizar el valor de esta función equivale a maximizar la función contraria, con lo cual la función objetivo quedará definida por:

$$\phi = \max\left[\sum_{(i,j)\in\mathbb{R}} p_{ij} \times d_{ij}\right] \tag{6}$$

A la condición restrictiva dada por la expresión 3 habrá que añadir las condiciones:

$$d_{ij} \leq d_j - d_i \tag{7}$$
$$d(0) = 0 \tag{8}$$
$$d(n) = d_M$$

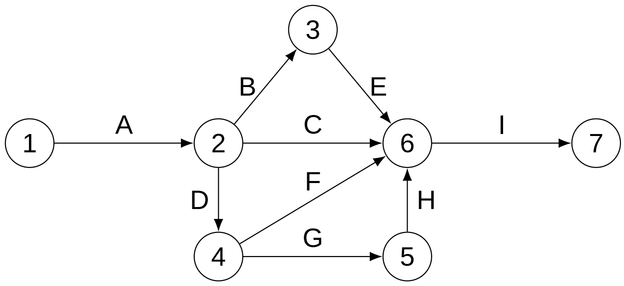
donde $d_i$ y $d_j$ con los tiempos más tempranos de inicio y de terminación de $A_{ij}$, y siendo d(0) y d(n) las fechas de inicio y fin del proyecto.

Con este planteamiento, se define un modelo de optimización en el que tanto la función objetivo como las restricciones son lineales. El problema de optimización queda reducido a la resolución de un problema de programación lineal paramétrica en el que para cada valor de $d_M$ se obtendrán las duraciones óptimas correspondientes a cada actividad.

Puesto que las condiciones restrictivas impuestas excluyen valores negativos de la variable, en el modelo propuesto no es preciso incluir las restricciones de no negatividad, que son habituales en programación lineal.

Veamos un ejemplo práctico de cómo funciona la metodología expuesta:

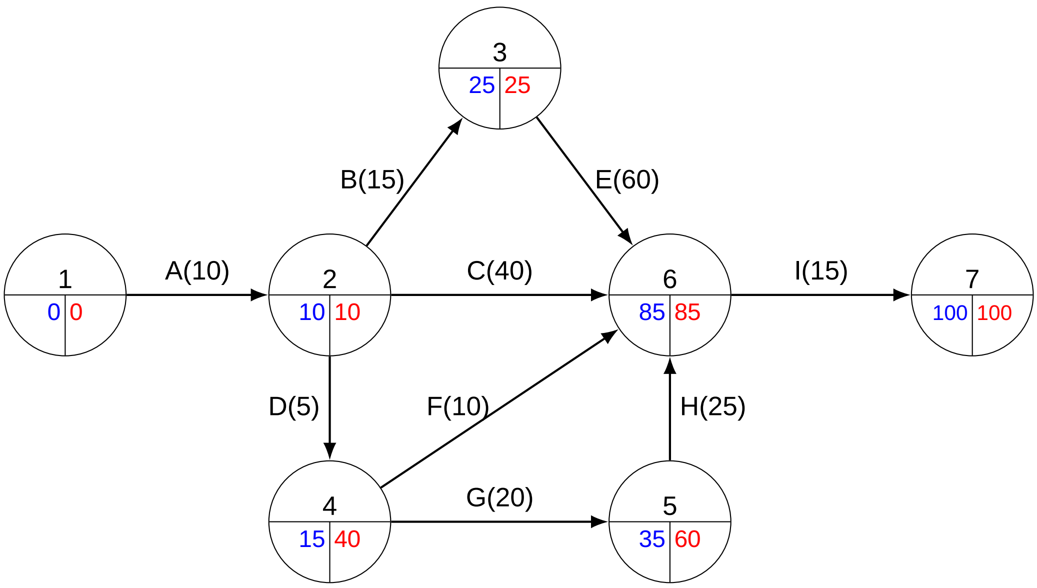
Supongamos el conjunto de actividades del cuadro y grafo que siguen.




| Actividad | Duraciones | | Costes | |
|---|---|---|---|---|
| | Max | Min | Max | Min |
| A | 20 | 10 | 180 | 120 |
| B | 25 | 15 | 160 | 140 |
| C | 45 | 40 | 240 | 220 |
| D | 15 | 5 | 150 | 80 |
| E | 75 | 60 | 550 | 400 |
| F | 20 | 10 | 200 | 150 |
| G | 25 | 20 | 195 | 180 |
| H | 30 | 25 | 220 | 200 |
| I | 25 | 15 | 240 | 160 |

Con estos datos se puede determinar la duración del proyecto para tener el coste directo máximo, y para obtener el coste mínimo para el plazo mínimo.

1. Determinación del coste directo máximo. Se dará cuando todas las actividades estén programadas con sus duraciones mínimas:




   El camino crítico es el definido por las actividades A-B-E-I, con un plazo de obra de: $d_M = 100$. El coste del proyecto así planteado es de 2135.

2. El siguiente paso será alargar la duración de las actividades no críticas para reducir el coste tanto como sea posible. En este caso las actividades no críticas son las C, D, F, G y H. Para conseguir el mejor resultado hay que combinar sus holguras con los datos del proyecto, lo que a su vez requiere evaluar:

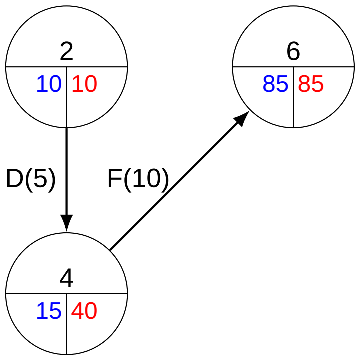
   - La pendiente $\dfrac{\Delta C}{\Delta T}$.
   - Los límites de variación de la duración de cada actividad.
   - La amplitud de la holgura.
   - La situación en la red

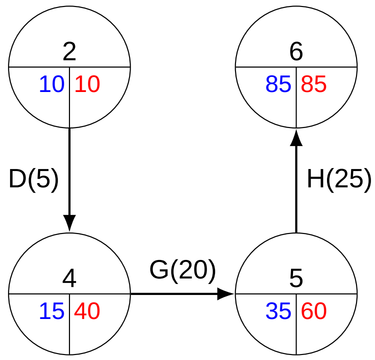
   Las dos primeras condiciones se deducen de los datos del problema, y las dos últimas de la red y de sus fechas según la programación anterior. El cuadro que siguen muestra estos valores:

| Actividad | Duración máxima | Holguras | | $\frac{\Delta C}{\Delta T}$ |
|---|---|---|---|---|
| | | Total | Libre | |
| C | 15 | 35 | 35 | 4 |
| D | 15 | 25 | 0 | 7 |
| F | 20 | 60 | 60 | 5 |
| G | 25 | 25 | 0 | 3 |
| H | 30 | 25 | 25 | 4 |

En la actividad C hay una holgura libre de 35, lo que significa que si se consume su holgura no se reduce la holgura de ninguna otra actividad, por lo que puede alargarse tanto como se pueda. En este caso se puede alargar hasta una duración de 45, porque esa es su duración máxima, a pesar de no agotar su holgura (se cumple la condición de la ecuación 3 anterior). Con esta nueva duración $t_C = 45$ su coste directo es de $C_C = 220$, lo que supone un ahorro de 20. El coste del proyecto ahora es de 2115.

3. Para las actividades D, F, G y H hay dos rutas y varias alternativas posibles. Las rutas posibles son:



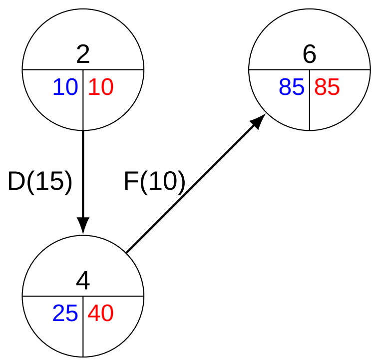




Las alternativas posibles son:

- Aumentar la duración de D tanto como se pueda, y el resto de la holgura, si lo hay, que lo consuman las otras actividades: F por un lado, y G y H por otro.
- Aumentar primero la duración de F tanto como se pueda, por un lado, y simultáneamente la de G y H. Si queda holgura en D, se aumenta su duración tanto como se pueda.

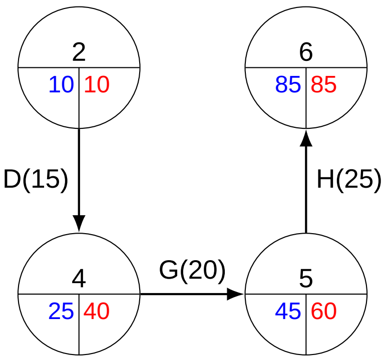
En este caso como el cociente $\frac{\Delta C}{\Delta T}$ es mayor en D, y D forma parte de ambos caminos, en principio es la actividad a prolongar, pues supondrá una mayor reducción de coste. El llevar D a su duración máxima $T_D = 15$ supondrá reducir las holguras de F y de G y H en esa cantidad, pero el ahorro es mayor. Concretamente el coste de D pasa a ser de $C_D = 80$, con un ahorro de 70. El coste del proyecto ahora es de 2095.

4. Ahora veamos la actividad F. El camino habrá quedado del modo que se indica en la figura que sigue:




o sea, que la holgura de F ha pasado a ser de 50. Eso permite prolongarla hasta su duración máxima ($t_F = 20$), con lo que su coste ahora es de $C_F = 150$, con una reducción de 50. El coste del proyecto ahora es de 2045.

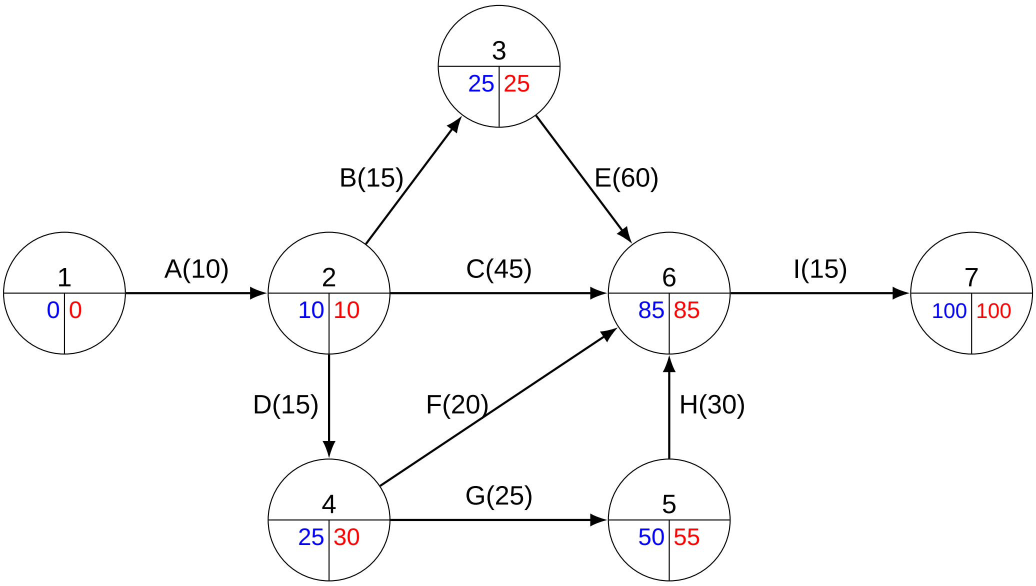
5. En la ruta G-H la situación ha quedado cono se ve en el gráfico que sigue:




La holgura total de la ruta es de 15. Esta holgura puede absorberse incrementando la duración de G, de H o de ambas. Como el cociente $\frac{\Delta C}{\Delta T}$ es mayor en H interesa aumentar la duración de esa actividad, que puede pasar a durar 30, que es su duración máxima. Se reduce el coste a $C_H$ = 200, con un ahorro de 20. El coste del proyecto ahora es de 2025.

Queda todavía una holgura en la ruta de 15-5=10, que puede usarse para prolongar la actividad G hasta $t_g$ = 25, su duración máxima, lo que deja su coste en $C_G$ = 180, con un ahorro de 15. El coste del proyecto ahora es de 2030.

Con las correcciones hechas, la programación que corresponde al máximo ahorro de costes directos (sin variación del plazo final), es la siguiente:



# 4. Plazos óptimos

Otro caso que puede darse en un proyecto es la de encontrar el plazo que supone un coste mínimo, lo que podríamos llamar *plazo óptimo*. Si no se considera el coste indirecto el plazo óptimo siempre será el que resulte de considerar la mayor duración de todas las actividades, es decir el plazo máximo, porque ese plazo está asociado a un coste directo mínimo.

Pero cuando se consideran los costes indirectos, el coste total (directo+indirecto) puede no ser el plazo máximo, porque la reducción de plazos conlleva una reducción de los costes indirectos que puede ser mayor que el incremento de los costes directos.

## 4.1. Criterios aplicables

En este caso, a diferencia del anterior, hay que actuar sobre las actividades que sean críticas, porque son las que determinan la duración total del proyecto. Además, de entre las críticas hay que actuar de forma prioritaria sobre las que tengan menor proporción $\frac{\Delta C}{\Delta T}$, para que el incremento de coste directo sea menor. Esquemáticamente el procedimiento ahora sería el siguiente:

1. Se toma, de entre las actividades criticas, aquellas cuya relación $\frac{\Delta C}{\Delta T}$ sea mayor. Estas actividades se acortan hasta sus duraciones mínimas si es posible.
2. Si al reducir la duración de alguna actividad crítica sucede que alguna no crítica pierde su holgura, esa pasa a ser crítica. En ese caso hay que considerar reducir también la duración de esta actividad.
3. Por supuesto, las reducciones de duración que se apliquen sobre cualquier actividad no deben quedar por debajo del límite mínimo fijado en la correspondiente curva de costes–tiempos.

## 4.2. Algoritmo de optimización

En este caso, para obtener la función a optimizar hay que añadir el término debido al coste indirecto:

$$\phi = \phi_d + \phi_i \tag{9}$$

siendo $\phi$ el coste total, $\phi_d$ el coste directo y $\phi_i$ el coste indirecto. El coste directo sigue siendo el que proporciona la ecuación 4:

$$\phi_d = \sum_{(i,j)\in\mathbb{R}} \left[ C_{ij} - p_{ij}(d_{ij} - T_{ij}) \right] \tag{10}$$

El coste indirecto depende de la duración total del proyecto, $d_M$. Para mantener la linealidad del problema, se va a suponer que el coste indirecto viene dado por una ecuación lineal del tipo:

$$\phi_i = \alpha + \beta \times d_M$$

Como la duración total del proyecto es:

$$d_M = \sum_{(i,j)\in\mathbb{R}} d_{ij}$$

así, la función 10 se puede expresar como:

$$\phi = \sum_{(i,j)\in\mathbb{R}} \left[ C_{ij} - p_{ij}(d_{ij} - T_{ij}) \right] + \alpha + \beta \sum_{(i,j)\in\mathbb{R}} d_{ij} \tag{11}$$

De nuevo sucede que $C_{ij}$, $T_{ij}$ y $p_{ij}$ son valores constantes, y también lo es el término $\alpha$, con lo que la función puede expresarse de la forma:

$$\phi = \sum_{(i,j)\in\mathbb{R}} C_{ij} + \sum_{(i,j)\in\mathbb{R}} p_{ij} \times T_{ij} + \alpha - \sum_{(i,j)\in\mathbb{R}} p_{ij} \times d_{ij} + \beta \sum_{(i,j)\in\mathbb{R}} d_{ij} = K - \sum_{(i,j)\in\mathbb{R}} p_{ij} \times dt_{ij} + \beta \sum_{(i,j)\in\mathbb{R}} d_{ij} \tag{12}$$

Minimizar el valor de esta función equivale a maximizar la función contraria, con lo cual la función objetivo quedará definida por:

$$\phi = \max \left[ \sum_{(i,j)\in\mathbb{R}} p_{ij} \times t_{ij} - \beta \sum_{(i,j)\in\mathbb{R}} t_{ij} \right] \tag{13}$$

A la condición restrictiva dada por la expresión 3 habrá que añadir las condiciones:

$$d_{ij} \leq d_j - d_i \tag{14}$$

$$d(0) = 0 \tag{15}$$

$$d(n) = d_M$$

donde $d_i$ y $d_j$ con los tiempos más tempranos de inicio y de terminación de $A_{ij}$, y siendo d(0) y d(n) las fechas de inicio y fin del proyecto.

Al igual que el caso visto en el apartado anterior se trata de un problema de optimización lineal tanto en la función objetivo como en las restricciones.

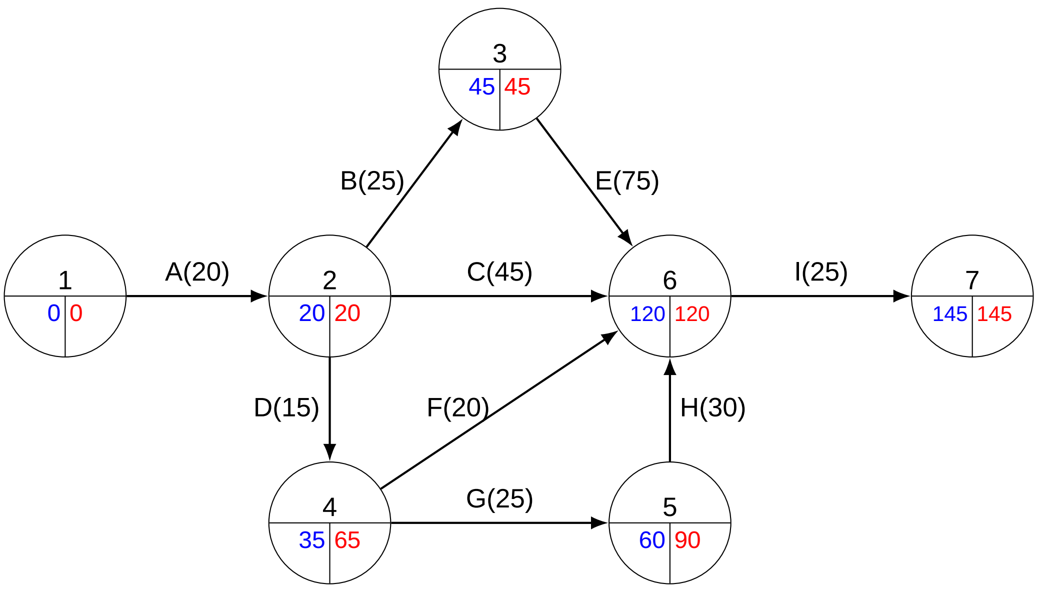
Consideramos el siguiente ejemplo para ver como aplicar la metodología descrita:

A partir del caso del epígrafe anterior, supongamos que hay que considerar un coste indirecto dado por la siguiente función:

$$\phi_i = 150 + 7 \times d_M$$

Los pasos a seguir son:

1. Se parte del programa de coste directo mínimo:

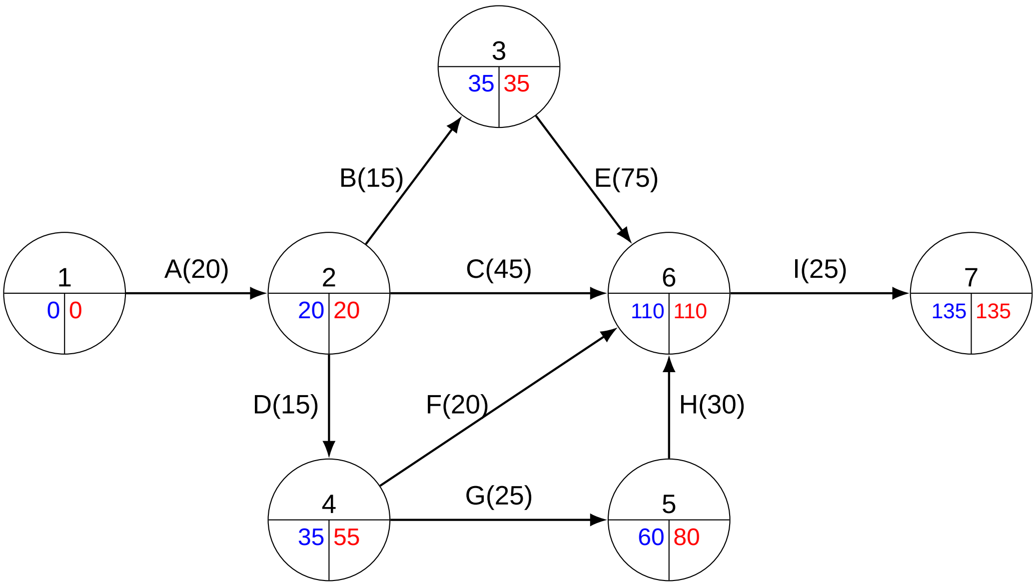



El camino crítico sigue siendo el definido por las actividades A-B-E-I, con un plazo de obra de: $d_M = 145$. El coste directo del proyecto así planteado es de 1650, y el indirecto será de I = 150 + 7 × 145 = 1165, con lo que el coste total es de 1650 + 1165 = 2815.

2. Como se tiene que actuar sobre las actividades críticas, hay que evaluar las relaciones $\frac{\Delta C}{\Delta T}$:

| Actividad | Duración mínima | $\Delta C/\Delta T$ |
|---|---|---|
| A | 10 | 6 |
| B | 15 | 2 |
| E | 60 | 10 |
| I | 15 | 8 |

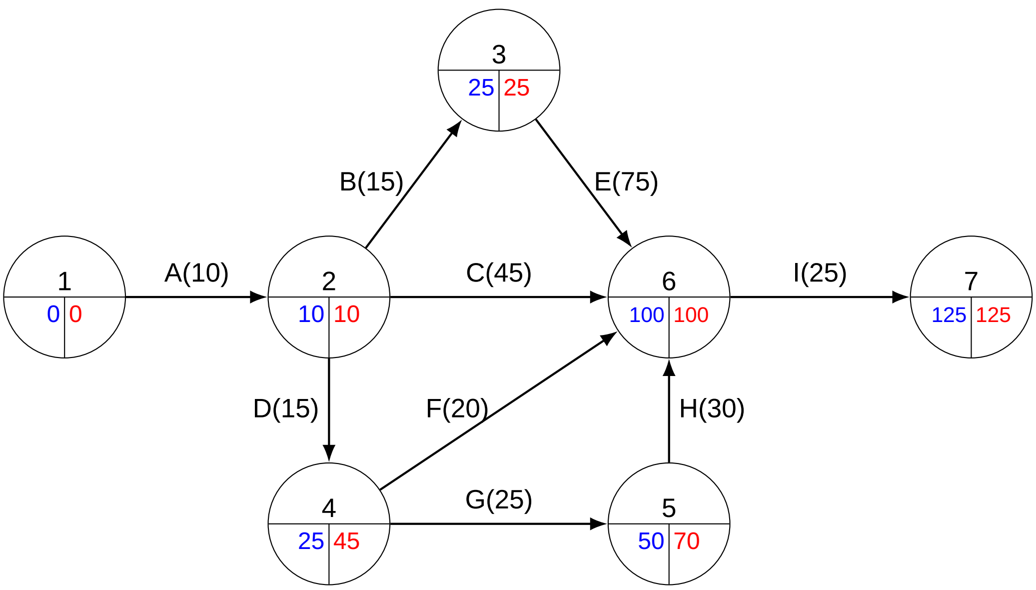
La actividad que interesa aumentar en primer lugar es la de menor relación $\frac{\Delta C}{\Delta T}$, que es la B. En este caso puede reducirse su duración hasta el valor mínimo sin que aparezcan nuevas actividades críticas. De ser así, habría que reducir hasta es punto, y analizar de nuevo el programa. Al reducir hasta 15 su duración, el programa sería el siguiente:




El nuevo plazo de obra de: $d_M$ = 135. El coste directo del proyecto así planteado es de 1670, por lo que se tiene un coste total de: 1670 + 150 + 7 × 135 = 2765.

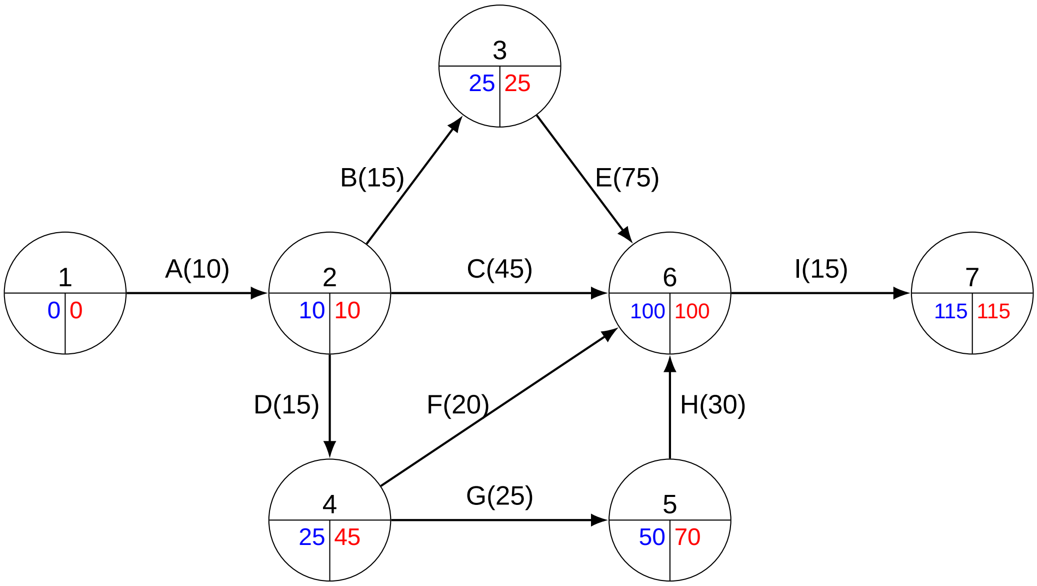
Como puede observarse, la holgura de las actividades no críticas se ha reducido, pero no se ha anulado, por lo que siguen sin ser críticas.

3. El siguiente paso es actuar sobre la actividad A, porque es la que tiene el cociente $\frac{\Delta C}{\Delta T}$ más bajo después de la B. De nuevo se reduce hasta su duración menor de 10, y se tiene:



En esta situación se tiene una duración de $d_M = 125$, un coste directo de 1730, y un coste total de: $1730 + 150 + 7 \times 125 = 2755$.

4. Siguiendo con el proceso, y puesto que el camino crítico no ha cambiado, ahora se actuará sobre la actividad I, que tiene el cociente $\frac{\Delta C}{\Delta T}$ más bajo después de la A y B. De nuevo se reduce hasta su duración menor de 15, y se tiene:




En esta situación se tiene una duración de $d_M = 115$, un coste directo de 1810, y un coste total de: $1810 + 150 + 7 \times 115 = 2765$.

Es decir, el coste total ha dejado de reducirse. Por lo tanto, el programa óptimo es el del punto anterior, con un plazo de 125.

Si se representan las duraciones y los costes directos, indirectos y totales se tiene la gráfica de la figura 5. Se ve como el coste indirecto es creciente con el plazo, pero el coste directo varía al revés, compensando uno al otro.

Si se analiza lo que ha sucedido en este ejemplo se puede ver que siempre que se actúe sobre la duración de una actividad, en la que la pendiente $\frac{\Delta C}{\Delta T}$ sea menor que el coeficiente $\beta$ del coste indirecto, el coste indirecto se reducirá más de lo que se incrementa el coste directo. Si por el contrario la pendiente es mayor que el coeficiente, siempre aumentará más el coste directo de lo que se reduzca el indirecto, y el coste total aumentará. Esto es así porque el problema está formulado de forma lineal. Si se usaran relaciones no lineales el problema es mucho más complejo.

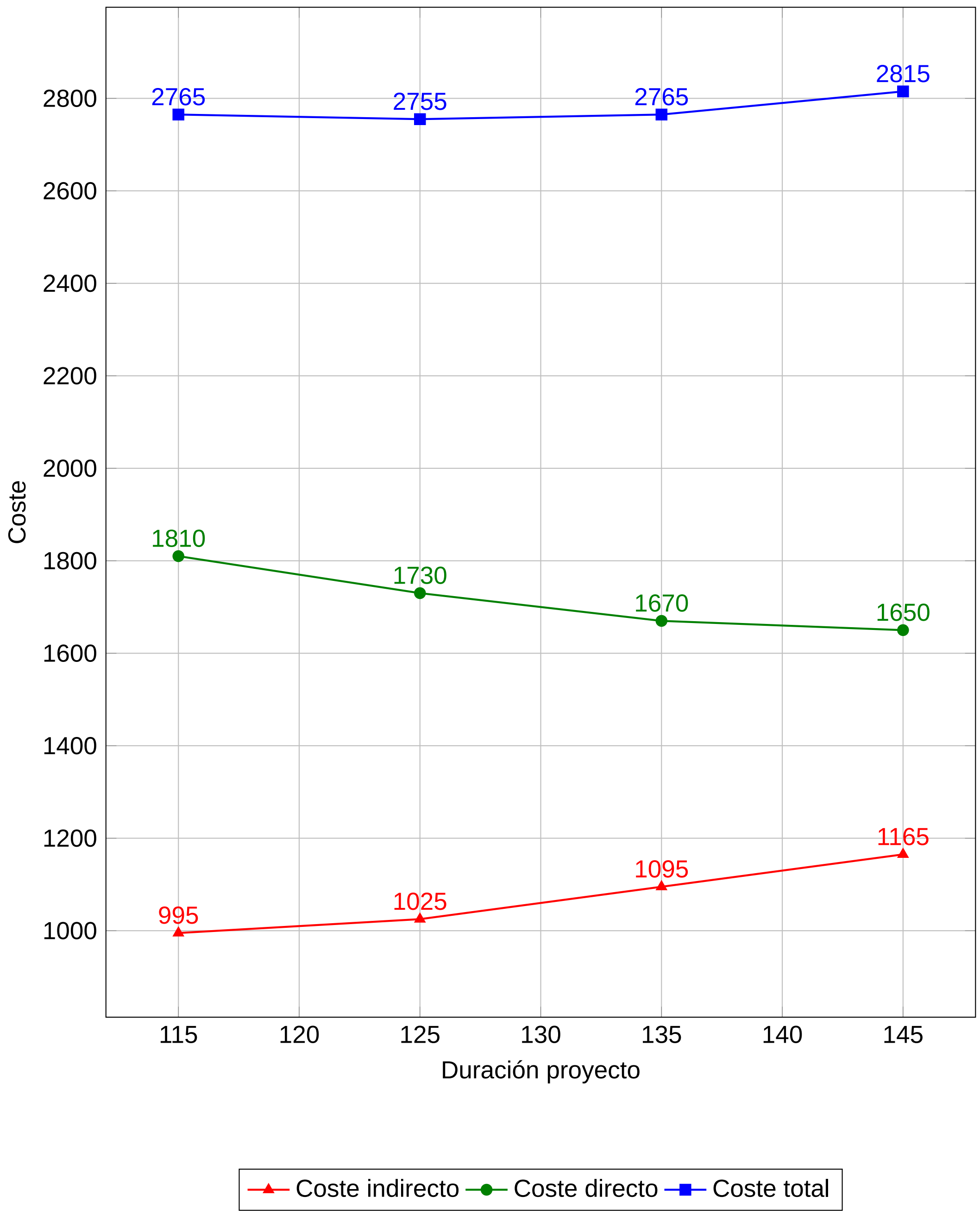
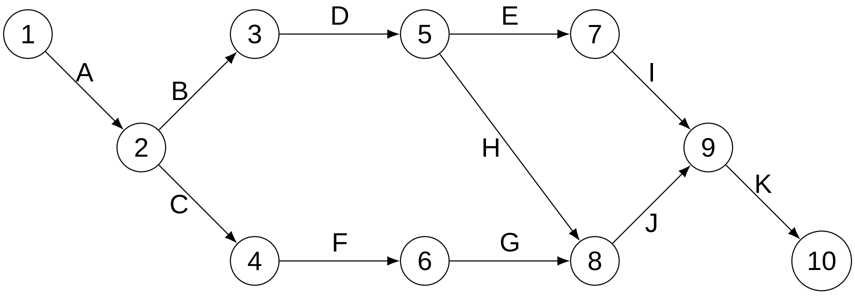



Figura 5: Relación plazo de proyecto vs. costes.

# EJERCICIOS RESUELTOS

## Ejercicio 1

La figura que sigue muestra el programa de trabajos de una obra:

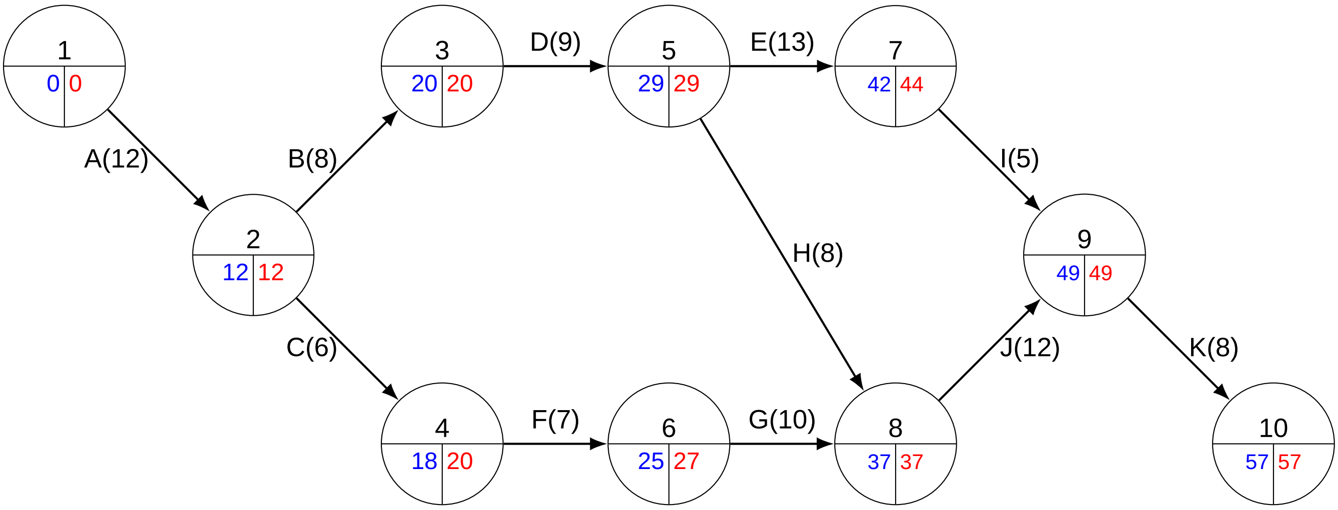



Se pide, encontrar la programación de menor duración posible, con el menor coste directo compatible con esa duración.

Las duraciones y los costes directos asociados a las mismas para las actividades de este proyecto son las siguientes:

| Actividad | $t_{min}$ | $T_{max}$ | $c_{min}$ | $C_{max}$ |
|---|---|---|---|---|
| A | 12 | 15 | 120 | 150 |
| B | 8 | 12 | 144 | 188 |
| C | 6 | 9 | 210 | 288 |
| D | 9 | 12 | 36 | 39 |
| E | 13 | 14 | 40 | 65 |
| F | 7 | 10 | 65 | 77 |
| G | 10 | 16 | 72 | 99 |
| H | 8 | 14 | 47 | 188 |
| I | 5 | 9 | 36 | 58 |
| J | 12 | 14 | 142 | 166 |
| K | 8 | 12 | 29 | 35 |

**Solución** Se comienza programando el proyecto para las duraciones mínimas (costes máximos):




El coste directo asociado a este programa es:

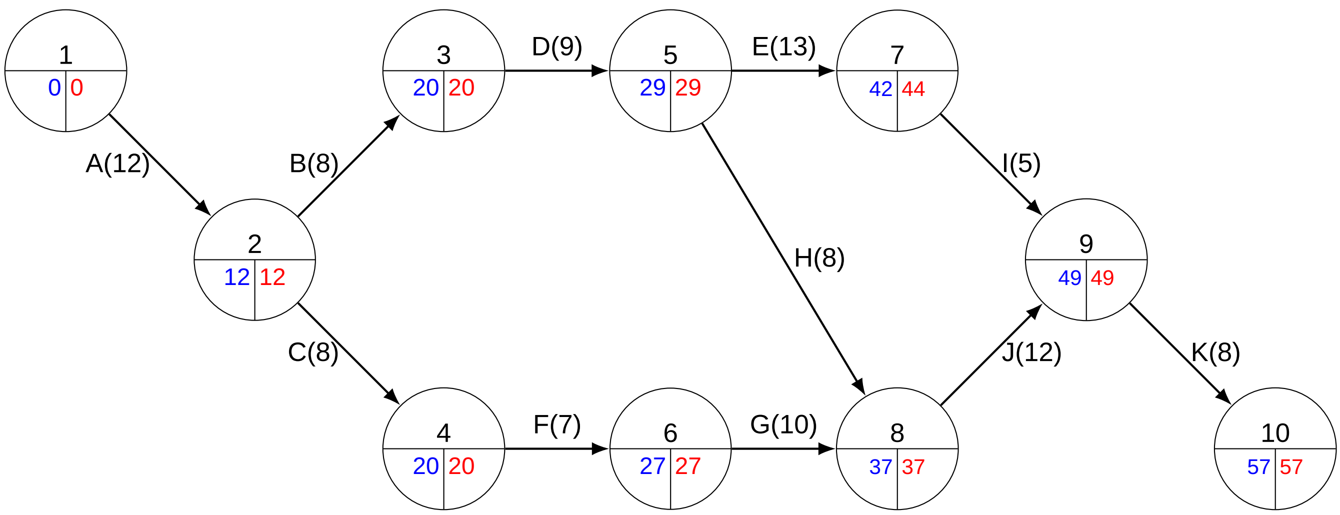
$$CD = 150 + 188 + 288 + 39 + 65 + 77 + 99 + 188 + 58 + 166 + 35 = 1353$$

Para reducir el coste hay que aumentar la duración de las actividades no críticas. En este caso el camino crítico es el formado por las actividades A–B–D–H–J–K.

El siguiente paso es obtener para las actividades no criticas los cocientes $\frac{\Delta C}{\Delta T}$:

$$p_C = \frac{288-210}{9-6} = 26$$
$$p_E = \frac{65-40}{14-13} = 25$$
$$p_F = \frac{77-65}{10-7} = 4$$
$$p_G = \frac{99-72}{16-10} = 4.5$$
$$p_I = \frac{58-36}{9-5} = 5.5$$

A la vista de los cocientes, la primera actividad que hay que retrasar es la C, ya que el cociente es mayor. Su duración máxima es de 9, lo que supone aumentar su duración en 3, pero como su holgura solo es de 2, hay que dejar su duración en 8. Esto agotará las holguras de F y G, que se harán críticas, al igual q ue la propia actividad C. El programa quedará así:



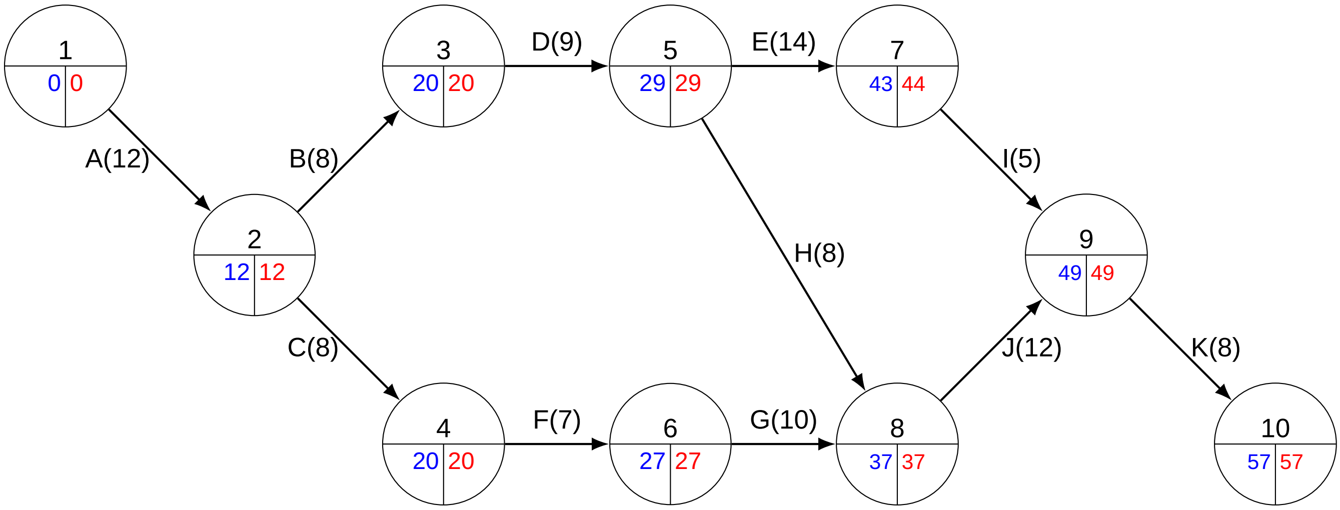

El coste directo de C se obtiene interpolando:

$$C_C = C_{max} - \frac{\Delta C}{\Delta T}(d_C - T_{min}) = 288 - 26 \times (8-6) = 236$$

Y el coste directo total asociado a este programa es:

$$CD = 150 + 188 + (236) + 39 + 65 + 77 + 99 + 188 + 58 + 166 + 35 = 1301$$

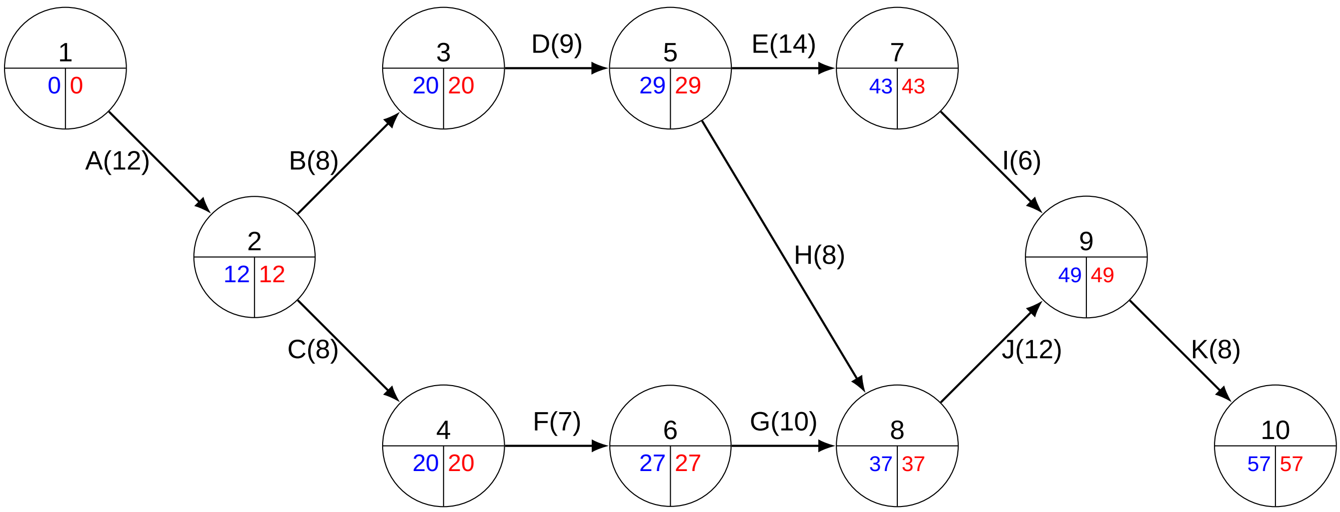
El siguiente paso es prolongar la duración de la siguientes actividad con holgura cuyo cociente $\frac{\Delta C}{\Delta T}$ sea mayor. Ñas actividades C, F y G ya no tienen holgura como se ha dicho. La actividad en cuestión será la E. La duración de esta actividad puede prolongarse en una unidad solamente, aunque, a diferencia de la actividad anterior, tiene una holgura mayor. Si se prolonga en una unidad el programa que da como sigue:




El coste directo de E será $C_E$ = 40, y el coste directo total asociado a este programa es:

$$CD = 150 + 188 + 236 + 39 + (40) + 77 + 99 + 188 + 58 + 166 + 35 = 1276$$

Finalmente, se puede prolongar la actividad I que todavía tiene holgura. Su holgura es de una unidad, así que se peude prolongar hasta una duración de 6:




Interpolando para obtener el coste directo de I:

$$C_I = 58 - 5.5 \times (6 - 5) = 52.5$$

Y el coste directo total asociado a este programa es:

$$CD = 150 + 188 + 236 + 39 + 40 + 77 + 99 + 188 + (52.5) + 166 + 35 = 1270.5$$

Este es el menor coste posible para la duración mínima del proyecto.

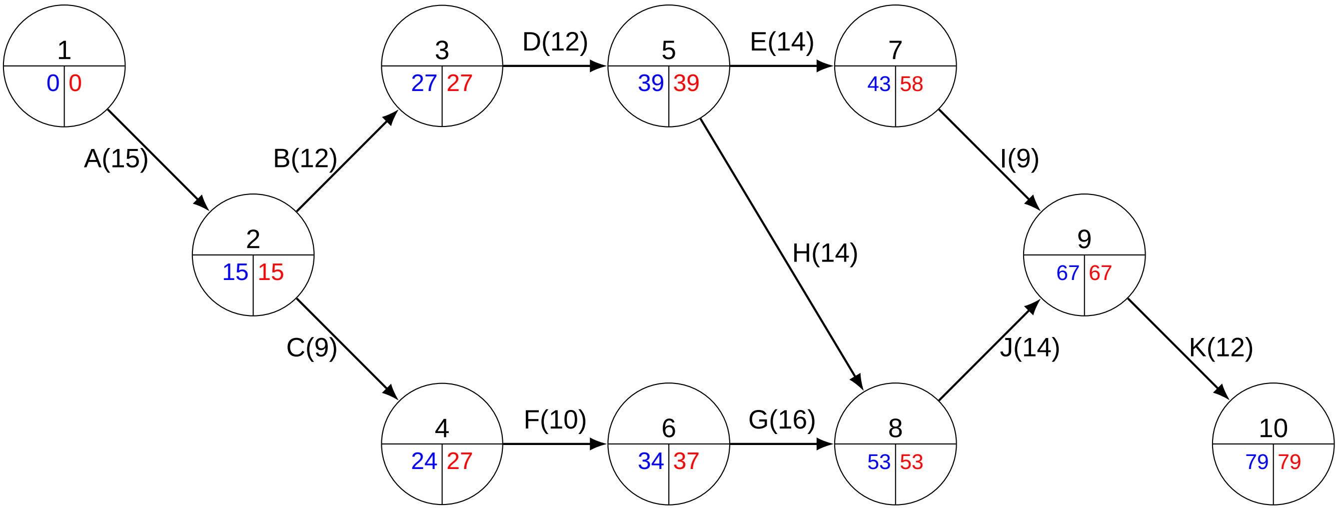
## Ejercicio 2

Con los datos del problema anterior, se pide ahora obtener el programa óptimo si la obra tiene unos costes indirectos dados por la expresión:

$$CI = 12 + 8 \times T \tag{16}$$

siendo T la duración del proyecto.

**Solución** En este caso se comienza programando el proyecto para las duraciones máximas (costes mínimos):




El cálculo de los costes sería:

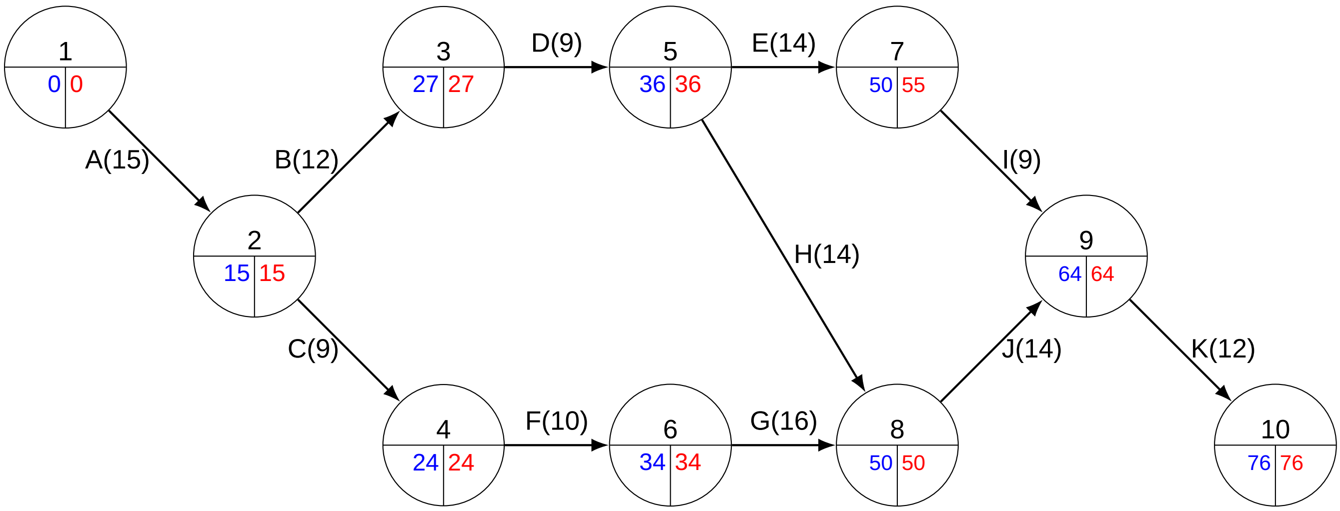
- Coste directo: CD = 120 + 144 + 210 + 36 + 40 + 65 + 72 + 47 + 36 + 142 + 29 = 941
- Coste indirecto: CI = 12 + 8 × 79 = 644
- Coste total: CT = 941 + 644 = 1585

A partir de este programa se va a actuar sobre las actividades del camino crítico para reducir la duración del proyecto, y así reducir el coste indirecto. Interesa reducir las actividades críticas cuyo cociente $\frac{\Delta C}{\Delta T}$ sea menor, para incrementar el coste directo lo menos posible:

$$p_A = \frac{150 - 120}{15 - 10} = 10$$
$$p_B = \frac{188 - 144}{12 - 8} = 11$$
$$p_D = \frac{39 - 36}{12 - 9} = 1$$
$$p_H = \frac{188 - 47}{14 - 8} = 23.5$$
$$p_J = \frac{166 - 142}{14 - 12} = 12$$
$$p_K = \frac{35 - 29}{12 - 8} = 1.5$$

La actividad cuya duración interesa reducir es la D. La duración mínima de D es 9, es decir, una reducción de duración de 3, pero hay que comprobar que la duración de C puede reducirse tanto sin que deje de ser crítica. En este caso es sencillo ver que sí puede reducirse hasta 9, porque el camino formado por C–F–G tiene una holgura de camino de 3. Si no fuese tan claro, habría que ir reduciendo de uno en uno y recalcular el programa.

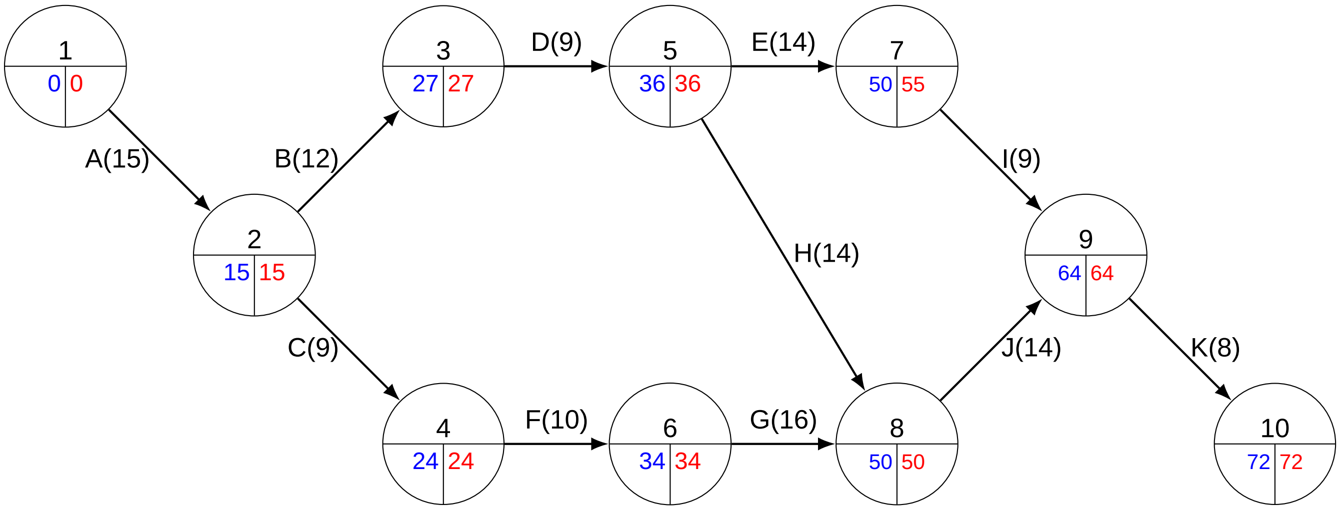
Reduciendo C a una duración de 9 se tiene el programa que sigue:




El coste es:

- Coste directo: CD = 120 + 144 + 210 + (39) + 40 + 65 + 72 + 47 + 36 + 142 + 29 = 944
- Coste indirecto: CI = 12 + 8 $\times$ 76 = 620
- Coste total: CT = 941 + 620 = 1564

Nótese como el coste total se ha reducido, y como las actividades C, F y G ahora son críticas. Al ser críticas estas actividades puede suceder que interese actuar sobre ellas, pero en este caso no es así. La siguiente actividad cuya duración hay que reducir es la K, cuya duración mínima es de 8, con lo que el programa quedaría como sigue:




Se tiene ahora:

- Coste directo: CD = 120 + 144 + 210 + 39 + 40 + 65 + 72 + 47 + 36 + 142 + (35) = 950
- Coste indirecto: CI = 12 + 8 $\times$ 72 = 588

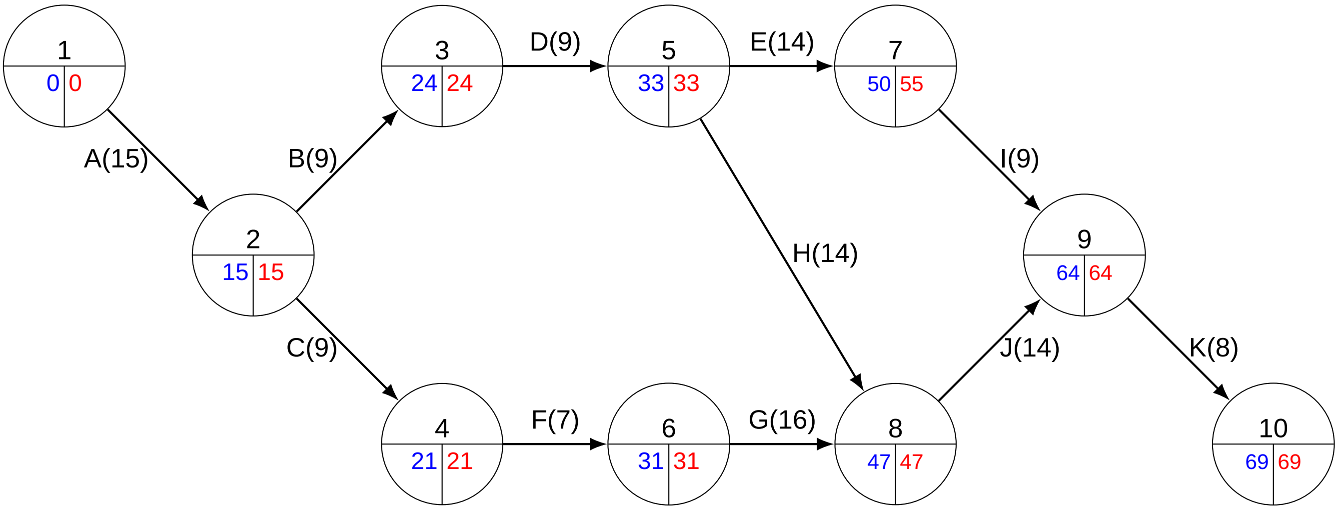
- Coste total: CT = 950 + 588 = 1538

Se ve como el coste total se ha reducido de nuevo.

Observando el programa se plantea ahora el caso en el que que las actividades críticas están en dos caminos críticos:

- A–B–D–H–J–K
- A–C–F–G–J–K

Esto plantea ahora la siguiente cuestión: si se reduce duración de la la actividad F por ser la actividad con menor cociente $\frac{\Delta C}{\Delta T}$, deja automáticamente de ser crítica, y la duración total del proyecto no varía (por tanto no varía el coste indirecto). En estos casos hay que actuar al mismo tiempo en actividades del otro camino crítico. La actividad D ya está en su duración mínima, luego hay que actuar sobre B o H, y de ambas, el menor cociente $\frac{\Delta C}{\Delta T}$ lo tiene B. El paso siguiente es entonces reducir la duración de F y B simultáneamente, y en la misma magnitud. Se observa que F puede reducir su duración en 3, y B en 4, luego se van a reducir ambas en 3:




El coste directo asociado a la duración de B es:

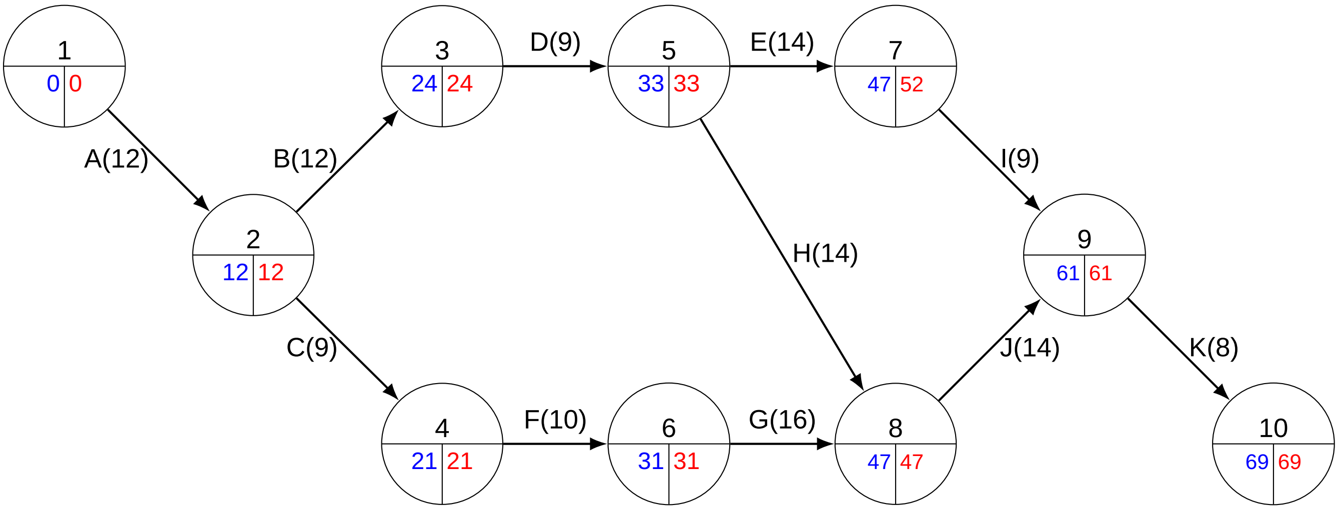
$$C_B = 188 - 11 \times (9 - 8) = 177$$

con lo que el coste es:

- Coste directo: CD = 120 + (177) + 210 + 39 + 40 + (77) + 72 + 47 + 36 + 142 + 35 = 995
- Coste indirecto: CI = 12 + 8 × 69 = 564
- Coste total: CT = 995 + 564 = 1559

Pero se ve que no se ha reducido el coste total.

Una alternativa al paso anterior sería haber reducido la duración de A o de J, por ser actividades que aparecen en ambos caminos críticos. Veamos que sucede si se reduce la duración de A en lugar de la de B y F del paso anterior. La duración de la actividad se puede reducir hasta en 3, quedando una duración de 12:




El coste será:

- Coste directo: CD = (15) + 144 + 210 + 39 + 40 + 65 + 72 + 47 + 36 + 142 + 35 = 980
- Coste indirecto: CI = 12 + 8 $\times$ 69 = 564
- Coste total: CT = 980 + 564 = 1544

Que tampoco mejora al anterior.

Como conclusión, el programa que proporciona el coste total óptimo es el de 72 días de duración con un coste total de 1538.

# Referencias

[1] H. Kerzner. *Project Management: A Systems Approach to Planning, Scheduling, and Controlling*. Wiley, 2025. ISBN: 9781394290031. URL: https://books.google.es/books?id=JRlHEQAAQBAJ.

[2] David R. Pierce. *Project scheduling and management for construction*. eng. Fourth edition. RSMeans ; v.89. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2013. ISBN: 9781118417171.

[3] Erik Leuven Demeulemeester y Willy S Herroelen. *Project scheduling*. en. International Series in Operations Research & Management Science. New York, NY: Springer, abr. de 2013.

# NOTAS