



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

**CAMINOS
UPV**

PROGRAMACIÓN
DE PROYECTOS

EL MÉTODO PERT

J. Alcalá

*Departamento de Ingeniería de la Construcción
y de Proyectos de Ingeniería Civil*

Programación de Proyectos
EL MÉTODO PERT

©2025

Julián Alcalá González jualgon@upv.es



Departamento de Ingeniería de la Construcción
y de Proyectos de Ingeniería Civil
Ref.: 0023-0056-PRC-00961-0017
Documento elaborado en \LaTeX

Índice

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción | 3 |
| 2. Funciones de densidad de probabilidad | 3 |
| 2.1. Distribución normal | 4 |
| 2.2. Distribución β | 7 |
| 3. Planteamiento probabilista del PERT | 8 |
| 4. Cumplimiento de plazos | 9 |
| 5. Limitaciones del PERT | 11 |
| EJERCICIOS RESUELTOS | 13 |
| Referencias | 21 |

(Página intencionadamente dejada en blanco)

1. Introducción

El método PERT (*Program Evaluation and Review Technique*) introduce en la programación de proyectos la incertidumbre asociada a la duración de las actividades. Para ello aplica conceptos de estadística y probabilidad que permiten cuantificar la probabilidad de que un plazo sea cumplido o no, a partir de las incertidumbres de las duraciones de sus actividades individuales. En cuanto a la forma de desarrollo formal, en el método PERT las actividades pueden representarse por redes de flechas o de precedencias.

2. Funciones de densidad de probabilidad

En estadística se define un *variable aleatoria* como una variable cuyo valor no es posible conocer de antemano, porque depende de procesos que no podemos analizar con precisión. Por ejemplo, no es posible saber con antelación cuanto lloverá al día siguiente, y ni si quiera se puede tener certeza absoluta de si lloverá o no. Y eso no es porque no sepamos qué fenómeno meteorológico gobierna la formación de la lluvia, que lo conocemos, sino porque no podemos saber exactamente las condiciones de temperatura, presión y humedad del aire que va a haber. Pero a pesar de ello, sí es posible obtener la probabilidad de que llueva al día siguiente.

El PERT se basa en el hecho de que la duración de las actividades está sujeta a incertidumbres, y no es conocida nunca con precisión. Lo más a lo que se puede aspirar es a considerarla como una *variable aleatoria*. Una variable aleatoria es una función que asigna un valor numérico a cada resultado de un experimento aleatorio. Para tratar matemáticamente las variables aleatorias es necesario asignarles una *función de probabilidad* si la variable aleatoria es discreta, o una *función de densidad de probabilidad*, si es continua: $f(t) = P(\xi = t)$. Estas últimas normalmente vienen definidas por parámetros estadísticos, siendo casi siempre la *media* (μ), la *moda* (m) y la *varianza* (σ).

Recordemos que en una función de densidad de probabilidad, la probabilidad de que una variable aleatoria ξ tome un valor entre dos límites x_1 y x_2 viene dada por el área encerrada por la curva entre esos límites. En la figura 1 la probabilidad de que ξ tome un valor entre x_1 y x_2 sería el área indicada en azul.

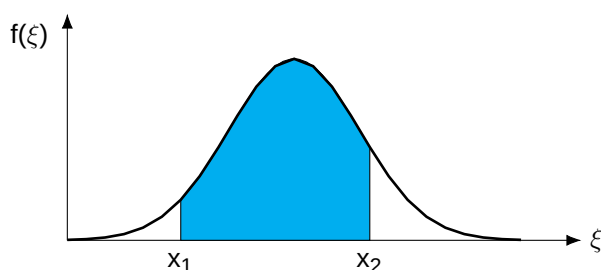


Figura 1: Funciones de distribución de probabilidad.

Del mismo modo, la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor menor que otro dado $P(\xi \leq x)$, sería el área azul de la figura 2, y la probabilidad de que tome un valor mayor $P(\xi \geq x)$ sería el área verde.

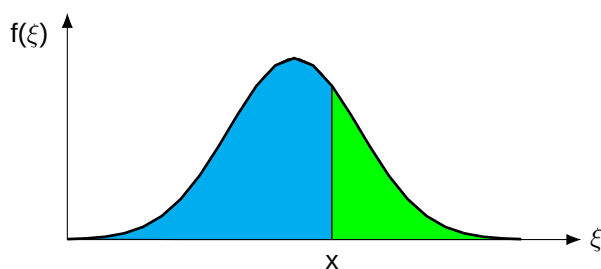


Figura 2: Función de distribución de probabilidad.

Obsérvese que ambas probabilidades son complementarias porque suman 1, de modo que $P(\xi \leq x) = 1 - P(\xi \geq x)$. Esto significa que uno de los dos casos se va a producir con toda seguridad, como es evidente.

Esta ley puede ser simétrica ($\mu = m$), asimétrica hacia la derecha ($\mu < m$) o asimétrica hacia la izquierda ($\mu > m$) como se muestra en la figura 3.

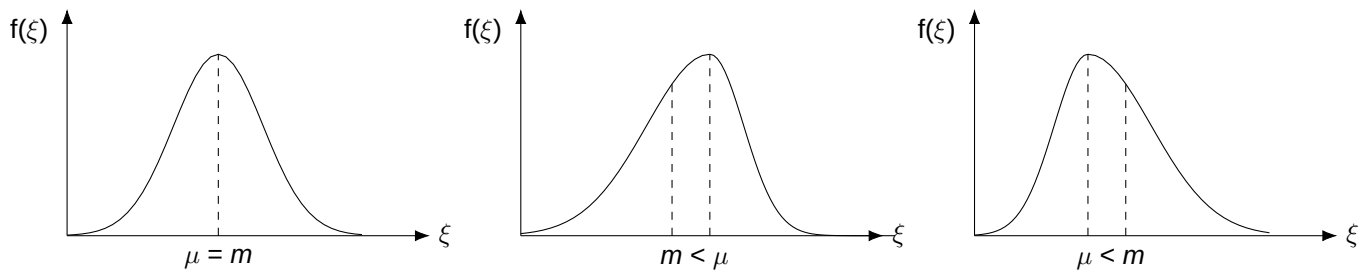


Figura 3: Posibles funciones de distribución de probabilidad.

Como lo más frecuente es que se necesite conocer la probabilidad de que una variable no supere un valor, cada función de densidad de probabilidad tiene una *función acumulada de probabilidad* asociada. esta función $F(x) = P(\xi \leq x)$ puede obtenerse por integración de la función de densidad de probabilidad. Es decir:

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(\xi)d\xi \tag{1}$$

La forma de una función acumulada es la que se muestra en la figura 4.

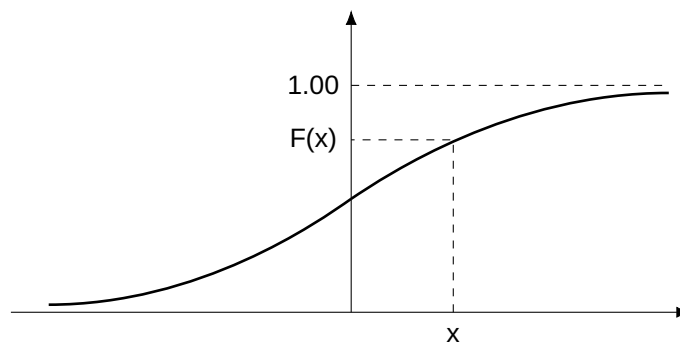


Figura 4: Función acumulada de probabilidad.

En esta función de distribución cada ordenada representa el área limitada por la función de densidad, el eje OX y la ordenada $f(x)$ en el punto de abscisa x . Dicho de otro modo, el valor de $F(x)$ de la figura 4 es el área azul de la figura 2.

2.1. Distribución normal

Las funciones de densidad de probabilidad de los sucesos aleatorios no se conocen nunca, pero se han formulado algunas funciones que se ajustan suficientemente bien a algunos fenómenos. Las más conocidas son:

- Distribución uniforme geométrica.
- Distribución exponencial.
- Distribución t de Student.
- Distribución γ (Gamma).
- Distribución β (Beta).
- Distribución normal.

La más importante de todas por lo que después se verá es la distribución normal. La función de densidad de una distribución normal de media μ y varianza σ^2 es:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-1/2 \left(\frac{t-\mu}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (2)$$

y como es fácil de comprobar, los valores $P(\xi = t)$ que definen sus ordenadas son simétricas respecto a la recta $t = \mu$. La probabilidad $P(\xi \leq t)$ estará definida por la correspondiente función acumulada cuya expresión en este caso será:

$$F(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp \left[-1/2 \left(\frac{\xi-\mu}{\sigma} \right)^2 \right] d\xi \quad (3)$$

Para calcular los valores $P(\xi \leq t)$ sin tener que resolver esta integral, en la práctica se recurre a tipificar la variable ξ , es decir a tomar una nueva variable η mediante la transformación :

$$\eta = \frac{\xi - \mu}{\sigma} \quad (4)$$

La distribución de esta nueva variable es una distribución normal de media cero y varianza la unidad (*normal tipificada*). Sus funciones de densidad y de distribución quedan simplificadas de la forma:

- Función de densidad:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \quad (5)$$

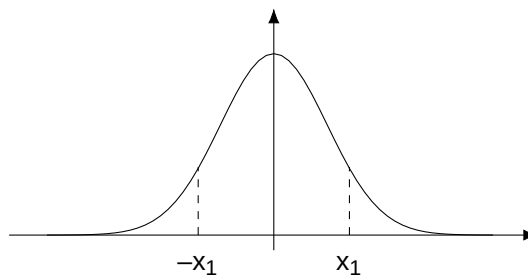


Figura 5: Función de densidad de probabilidad de la distribución *normal tipificada*.

- Función de distribución:

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\xi^2/2} d\xi \quad (6)$$

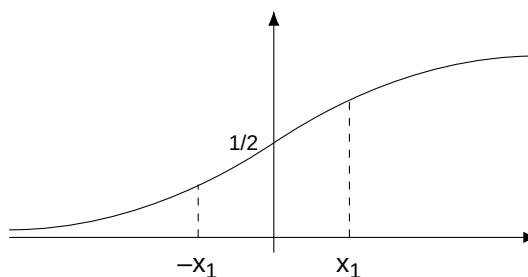


Figura 6: Función de distribución acumulada de la *normal tipificada*.

Los valores tabulados de esta distribución $N_{(0,1)}$ permiten obtener con facilidad la probabilidad de cualquier variable aleatoria tipificable $N(\mu, \sigma)$.

En la tabla 1 figuran las ordenadas de la función de distribución $N_{(0,1)}$ correspondientes a la probabilidad $P(\xi < x)$ de cualquier valor de la variable aleatoria x . Dado que $f(x)$ es simétrica respecto al eje de ordenadas, en la función de distribución se verificará que $f(-x) = 1 - f(x)$. Por ello, en la tabla anterior solo figuran las ordenadas correspondientes a valores positivos de la variable, a partir de los cuales pueden determinarse los que corresponden a valores negativos.

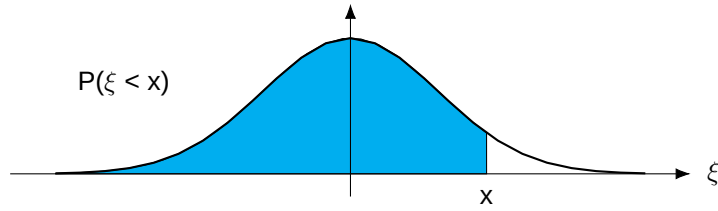


Tabla 1: Valores tabulados de la función normal de probabilidad $P(\xi < x)$.

| x | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0.0 | 0.50000 | 0.50399 | 0.50798 | 0.51197 | 0.51595 | 0.51994 | 0.52392 | 0.52790 | 0.53188 | 0.53586 |
| 0.1 | 0.53983 | 0.54380 | 0.54776 | 0.55172 | 0.55567 | 0.55962 | 0.56356 | 0.56749 | 0.57142 | 0.57535 |
| 0.2 | 0.57926 | 0.58317 | 0.58706 | 0.59095 | 0.59483 | 0.59871 | 0.60257 | 0.60642 | 0.61026 | 0.61409 |
| 0.3 | 0.61791 | 0.62172 | 0.62552 | 0.62930 | 0.63307 | 0.63683 | 0.64058 | 0.64431 | 0.64803 | 0.65173 |
| 0.4 | 0.65542 | 0.65910 | 0.66276 | 0.66640 | 0.67003 | 0.67364 | 0.67724 | 0.68082 | 0.68439 | 0.68793 |
| 0.5 | 0.69146 | 0.69497 | 0.69847 | 0.70194 | 0.70540 | 0.70884 | 0.71226 | 0.71566 | 0.71904 | 0.72240 |
| 0.6 | 0.72575 | 0.72907 | 0.73237 | 0.73565 | 0.73891 | 0.74215 | 0.74537 | 0.74857 | 0.75175 | 0.75490 |
| 0.7 | 0.75804 | 0.76115 | 0.76424 | 0.76730 | 0.77035 | 0.77337 | 0.77637 | 0.77935 | 0.78230 | 0.78524 |
| 0.8 | 0.78814 | 0.79103 | 0.79389 | 0.79673 | 0.79955 | 0.80234 | 0.80511 | 0.80785 | 0.81057 | 0.81327 |
| 0.9 | 0.81594 | 0.81859 | 0.82121 | 0.82381 | 0.82639 | 0.82894 | 0.83147 | 0.83398 | 0.83646 | 0.83891 |
| 1.0 | 0.84134 | 0.84375 | 0.84614 | 0.84849 | 0.85083 | 0.85314 | 0.85543 | 0.85769 | 0.85993 | 0.86214 |
| 1.1 | 0.86433 | 0.86650 | 0.86864 | 0.87076 | 0.87286 | 0.87493 | 0.87698 | 0.87900 | 0.88100 | 0.88298 |
| 1.2 | 0.88493 | 0.88686 | 0.88877 | 0.89065 | 0.89251 | 0.89435 | 0.89617 | 0.89796 | 0.89973 | 0.90147 |
| 1.3 | 0.90320 | 0.90490 | 0.90658 | 0.90824 | 0.90988 | 0.91149 | 0.91309 | 0.91466 | 0.91621 | 0.91774 |
| 1.4 | 0.91924 | 0.92073 | 0.92220 | 0.92364 | 0.92507 | 0.92647 | 0.92785 | 0.92922 | 0.93056 | 0.93189 |
| 1.5 | 0.93319 | 0.93448 | 0.93574 | 0.93699 | 0.93822 | 0.93943 | 0.94062 | 0.94179 | 0.94295 | 0.94408 |
| 1.6 | 0.94520 | 0.94630 | 0.94738 | 0.94845 | 0.94950 | 0.95053 | 0.95154 | 0.95254 | 0.95352 | 0.95449 |
| 1.7 | 0.95543 | 0.95637 | 0.95728 | 0.95818 | 0.95907 | 0.95994 | 0.96080 | 0.96164 | 0.96246 | 0.96327 |
| 1.8 | 0.96407 | 0.96485 | 0.96562 | 0.96638 | 0.96712 | 0.96784 | 0.96856 | 0.96926 | 0.96995 | 0.97062 |
| 1.9 | 0.97128 | 0.97193 | 0.97257 | 0.97320 | 0.97381 | 0.97441 | 0.97500 | 0.97558 | 0.97615 | 0.97670 |
| 2.0 | 0.97725 | 0.97778 | 0.97831 | 0.97882 | 0.97932 | 0.97982 | 0.98030 | 0.98077 | 0.98124 | 0.98169 |
| 2.1 | 0.98214 | 0.98257 | 0.98300 | 0.98341 | 0.98382 | 0.98422 | 0.98461 | 0.98500 | 0.98537 | 0.98574 |
| 2.2 | 0.98610 | 0.98645 | 0.98679 | 0.98713 | 0.98745 | 0.98778 | 0.98809 | 0.98840 | 0.98870 | 0.98899 |
| 2.3 | 0.98928 | 0.98956 | 0.98983 | 0.99010 | 0.99036 | 0.99061 | 0.99086 | 0.99111 | 0.99134 | 0.99158 |
| 2.4 | 0.99180 | 0.99202 | 0.99224 | 0.99245 | 0.99266 | 0.99286 | 0.99305 | 0.99324 | 0.99343 | 0.99361 |
| 2.5 | 0.99379 | 0.99396 | 0.99413 | 0.99430 | 0.99446 | 0.99461 | 0.99477 | 0.99492 | 0.99506 | 0.99520 |
| 2.6 | 0.99534 | 0.99547 | 0.99560 | 0.99573 | 0.99585 | 0.99598 | 0.99609 | 0.99621 | 0.99632 | 0.99643 |
| 2.7 | 0.99653 | 0.99664 | 0.99674 | 0.99683 | 0.99693 | 0.99702 | 0.99711 | 0.99720 | 0.99728 | 0.99736 |
| 2.8 | 0.99744 | 0.99752 | 0.99760 | 0.99767 | 0.99774 | 0.99781 | 0.99788 | 0.99795 | 0.99801 | 0.99807 |
| 2.9 | 0.99813 | 0.99819 | 0.99825 | 0.99831 | 0.99836 | 0.99841 | 0.99846 | 0.99851 | 0.99856 | 0.99861 |
| 3.0 | 0.99865 | 0.99869 | 0.99874 | 0.99878 | 0.99882 | 0.99886 | 0.99889 | 0.99893 | 0.99896 | 0.99900 |
| 3.1 | 0.99903 | 0.99906 | 0.99910 | 0.99913 | 0.99916 | 0.99918 | 0.99921 | 0.99924 | 0.99926 | 0.99929 |
| 3.2 | 0.99931 | 0.99934 | 0.99936 | 0.99938 | 0.99940 | 0.99942 | 0.99944 | 0.99946 | 0.99948 | 0.99950 |
| 3.3 | 0.99952 | 0.99953 | 0.99955 | 0.99957 | 0.99958 | 0.99960 | 0.99961 | 0.99962 | 0.99964 | 0.99965 |
| 3.4 | 0.99966 | 0.99968 | 0.99969 | 0.99970 | 0.99971 | 0.99972 | 0.99973 | 0.99974 | 0.99975 | 0.99976 |
| 3.5 | 0.99977 | 0.99978 | 0.99978 | 0.99979 | 0.99980 | 0.99981 | 0.99981 | 0.99982 | 0.99983 | 0.99983 |
| 3.6 | 0.99984 | 0.99985 | 0.99985 | 0.99986 | 0.99986 | 0.99987 | 0.99987 | 0.99988 | 0.99988 | 0.99989 |
| 3.7 | 0.99989 | 0.99990 | 0.99990 | 0.99990 | 0.99991 | 0.99991 | 0.99992 | 0.99992 | 0.99992 | 0.99992 |
| 3.8 | 0.99993 | 0.99993 | 0.99993 | 0.99994 | 0.99994 | 0.99994 | 0.99994 | 0.99995 | 0.99995 | 0.99995 |
| 3.9 | 0.99995 | 0.99995 | 0.99996 | 0.99996 | 0.99996 | 0.99996 | 0.99996 | 0.99996 | 0.99997 | 0.99997 |

Para ilustrar las ventajas de poder tipificar la normal pensemos el siguiente ejemplo: supongamos una variable aleatoria x cuya función de densidad de probabilidad es la normal de media $\mu = 9$, y varianza $\sigma^2 = 25$. Se pretende obtener la probabilidad de que x no sea mayor que 12.2, es decir, $N_{(9,25)}(x \leq 12.2)$. Al tipificar la normal, lo que se hace es obtener el valor η equivalente a 12.2, tal que $N_{(9,25)}(x \leq 12.2) = N_{(0,1)}(x \leq \eta)$, y para ello se emplea la ecuación 4:

$$\eta = \frac{12.2 - 9}{25} = 0.128$$

Si se busca este valor en la tabla 1 se tiene una probabilidad del 45%. Como ayuda al lector, en una hoja de cálculo de Microsoft Excel® puede usarse la función:

=DISTR.NORM(x ; μ ; σ^2 ; 1),

para obtener la probabilidad en la normal de media μ y varianza σ^2 , o la función

=DISTR.NORM.ESTAND.N(η ; 1)

si se ha tipificado la variable.

2.2. Distribución β

La distribución β , es parecida a una distribución normal, aunque con diferencias de forma características:

- No es asintótica con el eje OX , sino que lo corta en los puntos de abcisa $x = x_1$ y $x = x_2$.
- A diferencia de la distribución normal, no es simétrica, pudiendo presentar asimetría a la derecha o a la izquierda.

La función de densidad de una distribución β , definida por los valores extremos t_1 y t_2 , y por la moda o valor más probable t_p , tiene la expresión:

$$f(x) = c(x - x_1)^a(x_2 - x)^b \quad (7)$$

en la que a , b y c representan parámetros o valores constantes. Dependiendo de estos valores, la media y la varianza de esta distribución, son respectivamente:

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + (a + b)x_p}{2 + a + b} \quad (8)$$

$$\sigma^2 = \frac{(a + 1)(b + 1)(x_2 - x_1)^2}{(2 + a + b)(3 + a + b)} \quad (9)$$

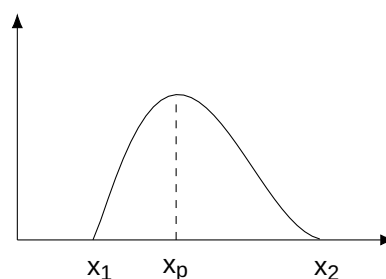


Figura 7: Función de distribución β .

3. Planteamiento probabilista del PERT

Los parámetros estadísticos que se manejan en el método PERT para el análisis y determinación de plazos, se basan en la asignación a cada actividad de tres tiempos estimados para su realización:

- duración más optimista (t_1),
- duración más pesimista (t_2), y
- duración más probable (t_p).

En la práctica, estas duraciones pueden tomarse de la experiencia con realizaciones similares, o de supuestos teóricos de ejecución bajo hipótesis máxima o mínimamente favorables. El Ejercicio 2 al final de este texto muestra una forma de obtener la distribución de probabilidad a partir de medidas observadas en una actividad.

En dicho método la variable aleatoria t (duración de una actividad) sigue una distribución definida por los 3 valores anteriores. Para poder definir la función se asume la hipótesis de que la desviación típica se hace igual a la sexta parte del intervalo $[t_2 - t_1]$, es decir:

$$\sigma = \frac{1}{6}(t_2 - t_1) \quad (10)$$

Bajo esta hipótesis, igualando las expresiones de σ definidas en 8 y 9, se tiene:

$$\frac{(a + 1)(b + 1)}{(2 + a + b)(3 + a + b)} = \frac{1}{36} \quad (11)$$

Como por otra parte el máximo obtenido al anular la primera derivada de la función 7 ha de coincidir con el valor de la moda $t = t_p$, se tendrá que:

$$t_p = \frac{a t_2 + b t_1}{a + b} \quad (12)$$

Para hacer compatibles las condiciones 11 y 12, en el método PERT se adoptan los valores:

$$\left. \begin{array}{l} a = 2 + \sqrt{2} \\ b = 2 - \sqrt{2} \end{array} \right\} \text{ para } t_p > \frac{t_1 + t_2}{2} \quad (13)$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 2 - \sqrt{2} \\ b = 2 + \sqrt{2} \end{array} \right\} \text{ para } t_p < \frac{t_1 + t_2}{2}$$

Con lo cual la media μ de la distribución β así definida forma el valor:

$$\mu = \frac{t_1 + t_2 + 4t_p}{6} \quad (14)$$

Con este planteamiento, las expresiones obtenidas en 10 y 14 permitirán obtener los valores de la media y de la varianza de la correspondiente función de distribución a partir de los tiempos t_1 , t_2 y t_p .

4. Cumplimiento de plazos

Para determinar la probabilidad de que un suceso ocurra en un tiempo determinado en el método PERT se sigue la siguiente metodología.

Una vez conocidos los valores de la media (μ) y de la varianza (σ^2) que definen las duraciones de cada actividad, se calcula la media y la varianza del suceso o plazo estudiado. Para ello puede seguirse el mismo procedimiento que en cualquier CPM, utilizando la red (de flechas o precedencias) que relacione las actividades consideradas y adoptando como duración de cada actividad su correspondiente valor medio (μ_i). Los instantes más tempranos de los sucesos que componen la red se considerarán valores medios de los tiempos consumidos para llegar a ellos, lo que equivale a adoptar como valor medio del instante más pronto de cada suceso la suma de los valores medios de las actividades que componen el camino más largo para llegar a él. En el caso de que el suceso estudiado sea el final de obra, este camino será el crítico.

Como valor de la varianza correspondiente al instante más pronto del suceso en cuestión, se adoptará también la suma de las varianzas de las actividades que componen el camino más largo.

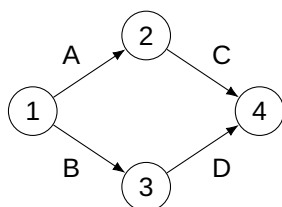
En resumen, a partir de los valores de la media (μ_i) y la varianza (σ_i^2) de la distribución correspondiente a cada actividad a_i se define la media (μ) y varianza (σ^2) del suceso final mediante las ecuaciones:

$$\mu = \sum \mu_i \quad (15)$$

$$\sigma^2 = \sum \sigma_i^2 \quad (16)$$

Para que estas ecuaciones sean rigurosamente aplicables, las duraciones de a_i , deben ser estadísticamente independientes, en cuyo caso puede admitirse según el teorema central del límite que la variable que describe la suma de dichas duraciones converge hacia una distribución normal de media μ , y varianza σ^2 determinadas por las ecuaciones 15 y 16.

A modo de ejemplo se aplica a continuación la metodología expuesta al cálculo de la probabilidad de que las actividades reflejadas en el cuadro y red adjunta, se realicen en un plazo de 45 y 39 días.



| Actividad | Duraciones | | |
|-----------|------------|--------------|-----------|
| | Optimista | Más probable | Pesimista |
| A | 7 | 10 | 12 |
| B | 16 | 18 | 20 |
| C | 9 | 12 | 17 |
| D | 20 | 24 | 26 |

El primer caso consiste en obtener la media y la varianza de la distribución β correspondiente a cada actividad. Aplicando las fórmulas 10 y 14 se tiene:

$$\mu_A = \frac{7 + 4 \times 10 + 12}{6} = 9.8$$

$$\sigma_A = \frac{12 - 7}{6} = 0.83$$

$$\mu_B = \frac{16 + 4 \times 12 + 20}{6} = 18.0$$

$$\sigma_B = \frac{20 - 16}{6} = 0.67$$

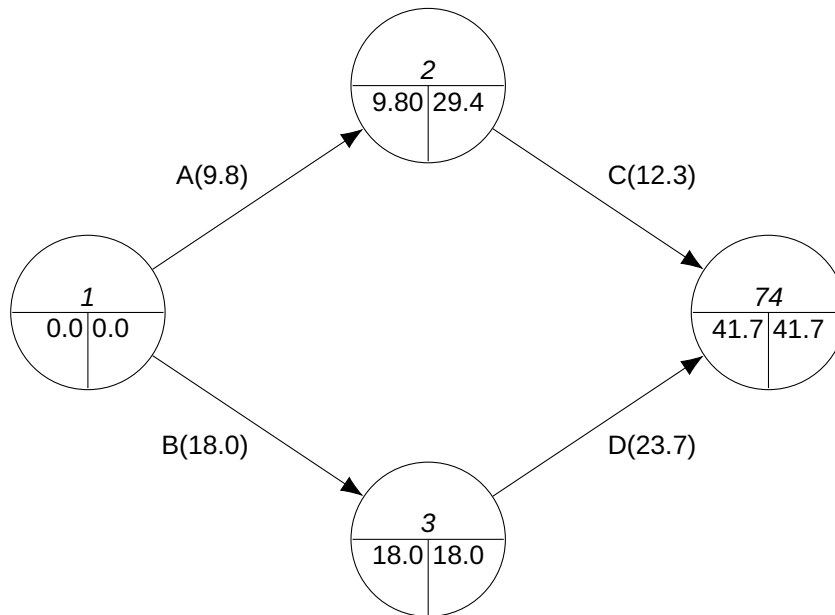
$$\mu_C = \frac{9 + 4 \times 12 + 17}{6} = 12.3$$

$$\sigma_C = \frac{17 - 9}{6} = 1.33$$

$$\mu_D = \frac{20 + 4 \times 24 + 26}{6} = 23.7$$

$$\sigma_D = \frac{26 - 20}{6} = 1.00$$

Tomando estos valores medios como duraciones de cada actividad, la red quedaría definida de la forma:



El camino crítico de 1 a 4 estaría formado por B y D y por tanto los valores de la media y de la varianza correspondientes a la variable aleatoria serán:

$$\mu = \mu_B + \mu_D = 41.7$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_B^2 + \sigma_D^2} = 1.2$$

Admitiendo que se cumplen las condiciones de independencia estadística entre las actividades B y D, la distribución de la variable aleatoria E_4 podría considerarse definida por una distribución normal $N(41.7, 1.2)$.

Tipificando esta variable se tiene:

$$x = \frac{t - 41.7}{1.2}$$

que es la nueva variable de distribución normal $N(0, 1)$.

Con las condiciones del enunciado la probabilidad de cumplir los plazos propuestos será de:

- para un plazo de $t=45$ días: $t = \frac{45 - 41.7}{2.1} = 2.75$
- para un plazo de $t=39$ días: $t = \frac{39 - 41.7}{2.1} = -2.25$

Para $x = 2.75$, en la tabla 1 se tiene $P(\xi < 2.75) = 0.9970$. La probabilidad de cumplir el plazo de 45 días es del 99.70%.

Para $x = 2.25$, en la tabla 1 se tiene $P(\xi < 2.25) = 0.9878$. Como $P(\xi < -x) = 1 - P(\xi > x)$, la probabilidad de cumplir el plazo de 39 días es del:

$$P(\xi < -2.25) = 1 - P(\xi < 2.25) = 0.0122$$

luego la probabilidad es del 1.22%.

5. Limitaciones del PERT

Con la aplicación del PERT se pretende superar la imprecisión de un problema estocástico, reduciéndolo a otro determinístico por simplificación del cálculo, a base de sustituir la duración total de la obra por la suma de las medias de las duraciones que definen el camino crítico.

De esta forma, el tiempo se considera como variable aleatoria y se introduce un concepto probabilista para la determinación de plazos, más acorde con la realidad. Pero para que el planteamiento del problema pueda considerarse válido, deben cumplirse las condiciones que hagan aplicable el teorema central del límite y que además, se mantenga sin variación el camino crítico que ha servido para determinar el plazo de ejecución.

Supongamos por ejemplo una red de flechas formada por las actividades de la figura 8, en la que el camino crítico obtenido con los valores medios de las distribuciones correspondientes a cada actividad, es el definido por los nudos 1-4-5-6.

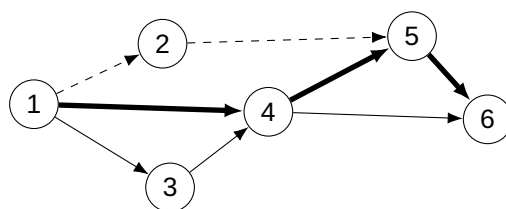


Figura 8: Ejemplo de grafo.

Podría ocurrir que la duración de algún camino no crítico (p.e. 1-2-5) fuera poco diferente de la del plazo de obra estimado para 1-4-5, o que la incertidumbre de cumplimiento de este plazo fuera mucho mayor que la correspondiente a la suma de los tiempos t_{1-2} y t_{2-5} . En tal caso, sería posible que durante el desarrollo de la obra el camino crítico pasara a ser el definido por 1-2-5-6.

Las condiciones para que esto no ocurra y por tanto para que la aplicación del PERT resulte fiable, serán tanto más favorables cuanto más alto sea el número de actividades del camino crítico, y cuanto mayor sea la diferencia entre el plazo que define y las duraciones correspondientes a otros caminos no críticos.

Nivel crítico de una actividad Se ha visto que la hipótesis de considerar un único camino crítico puede ser errónea con un planteamiento probabilístico como el del PERT. Sería por tanto conveniente conocer la probabilidad de que cualquier actividad no crítica llegara a serlo, y ésto en la práctica resulta complicado, dadas las numerosas combinaciones que definen todas las rutas posibles y la influencia que los parámetros estadísticos de una determinada actividad tiene sobre las posteriores.

Modelos de simulación Para soslayar la dificultad anterior se puede recurrir a métodos de simulación, aplicables en general al estudio estadístico de un fenómeno aleatorio, en el que los datos de la realidad se sustituyen por una muestra extraída de una función teórica que representa a la población real.

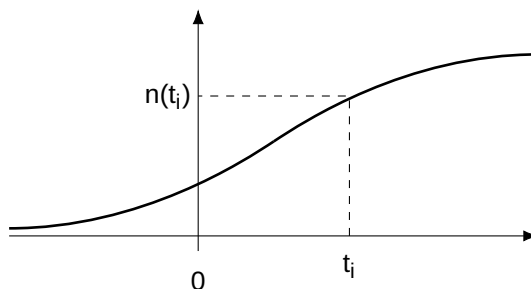


Figura 9: Obtención de resultados para la simulación *Monte Carlo*.

Entre éstos el método de *Monte Carlo* puede aplicarse a la determinación del nivel crítico de las actividades estudiadas en el PERT. Para ello es preciso contar con la definición estimativa de la distribución correspondiente a la duración de la variable a simular. De esta distribución, que puede ser la β o cualquier otra (binomial,

normal, triangular, uniforme, etc.), se extraerán los valores muestrales a partir de una amplia cantidad de números equiprobables de la siguiente forma:

Sobre el eje de ordenadas (ver figura 9) se toma un valor equiprobable t_i (extraído de tablas u obtenido por métodos que cumplan los tests de aleatoriedad) determinando la abscisa correspondiente $n(t_i)$ por medio de la función de distribución. Para cada valor obtendremos una abscisa que será diferente en cada actividad por serlo su función de distribución.

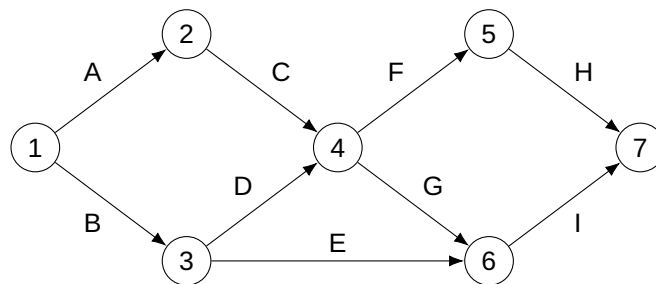
Con los valores muestrales así obtenidos, se define en la red del PERT un camino crítico. El proceso se repite con un número elevado de muestras, obteniendo para cada una de ellas un camino crítico igual o diferente del anterior. El nivel o grado crítico de cada actividad se define por la relación entre el número de veces que haya resultado crítica y el número total de muestras con las que se haya aplicado el proceso.

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejercicio 1

Dadas las actividades y duraciones relacionadas en la red y cuadro adjuntos, se pide:

1. Plazo esperado de ejecución final.
2. Probabilidad de terminar el proyecto tres días antes de la fecha esperada.
3. Probabilidad de llegar al nudo 6 tres días antes de la fecha esperada.



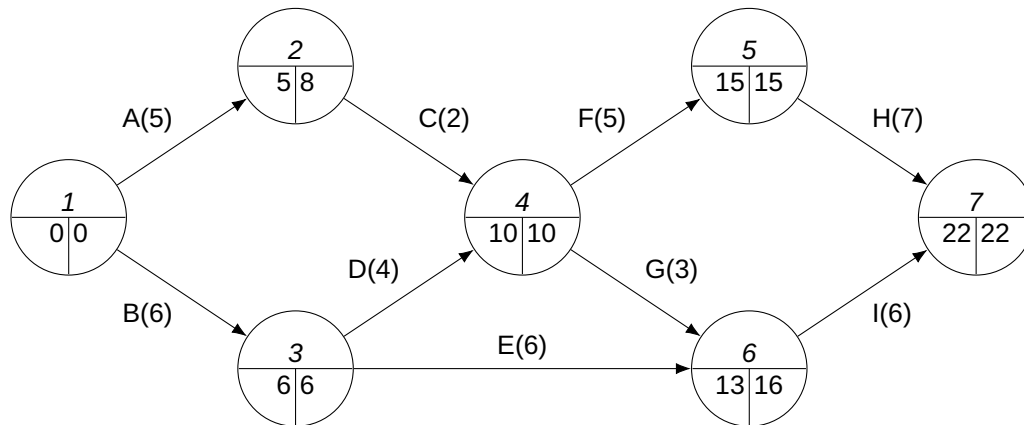
| Actividad | Duraciones | | |
|-----------|------------|--------------|-----------|
| | Optimista | Más probable | Pesimista |
| A | 3 | 5 | 7 |
| B | 3 | 5 | 13 |
| C | 1 | 2 | 3 |
| D | 2 | 4 | 6 |
| E | 4 | 5 | 12 |
| F | 4 | 5 | 6 |
| G | 1 | 3 | 5 |
| H | 1 | 8 | 9 |
| I | 5 | 5 | 11 |

Solución Para resolver el programa del proyecto se procede del modo que sigue:

1. Con los datos del cuadro anterior se obtienen las duraciones medias:

| Actividad | $\mu_i = \frac{t_{opt} + 4t_{mp} + t_{pes}}{6}$ |
|-----------|---|
| A | 5 |
| B | 6 |
| C | 2 |
| D | 4 |
| E | 6 |
| F | 5 |
| G | 3 |
| H | 7 |
| I | 6 |

Ahora se resuelve la red para esas duraciones:



Así se obtiene que el plazo esperado de ejecución es de 22 días.

2. En el programa anterior se comprueba que el camino crítico viene definido por la sucesión de actividades: B - D - F - H. Se obtiene la varianza para estas actividades:

$$\sigma_B = \frac{13 - 3}{6} = 1.667$$

$$\sigma_D = \frac{6 - 2}{6} = 0.667$$

$$\sigma_F = \frac{6 - 4}{6} = 0.333$$

$$\sigma_H = \frac{9 - 1}{6} = 1.333$$

La varianza del plazo será entonces: $\sigma = \sqrt{\sigma_B^2 + \sigma_D^2 + \sigma_F^2 + \sigma_H^2} = 2.26$

La distribución normal que define la duración del proyecto es por tanto la $N(22, 2.26)$. Para saber la probabilidad de que se termine en 19 días se aplica el cambio de variable:

$$x = \frac{t - 22}{2.26} = \frac{19 - 22}{2.26} = -1.33$$

Si se entra en la tabla de la normal tipificada (tabla 1) se obtiene, para $x=1.33$, un valor de $P(\xi < 1, 33) = 0.90824$. Pero como x toma el valor negativo, se toma el valor inverso del anterior, dado que la normal tipificada es simétrica: $P(\xi < -1, 33) = P(\xi > 1, 33) = 1 - 0.90824 = 0.09176$. Luego la probabilidad de terminar el proyecto en 19 días es del 9.176 %.

3. Definamos ahora la media y la varianza de la distribución de probabilidad correspondiente a la fecha del nudo 6. Estos valores serán:

$$\mu_6 = \mu_B + \mu_D + \mu_G = 6 + 4 + 3 = 13$$

$$\sigma_B = \frac{13 - 3}{6} = 1.667$$

$$\sigma_D = \frac{6 - 2}{6} = 0.667$$

$$\sigma_G = \frac{5 - 1}{6} = 0.667$$

La varianza del plazo será entonces: $\sigma = \sqrt{\sigma_B^2 + \sigma_D^2 + \sigma_G^2} = 1.92$

Suponiendo que la duración para llegar a 6, es una variable aleatoria de distribución $N(13; 1.915)$ y tipificando esta variable nueva variable de distribución $N(0,1)$:

$$x = \frac{t - 13}{1.915} = -1.57$$

para cuyo valor se obtiene en la tabla [1](#) la probabilidad pedida es por tanto de un 5,82 %.

Ejercicio 2

Las frecuencias con que se ha realizado una cierta actividad son, en función de su duración, las que se indican en el cuadro adjunto.

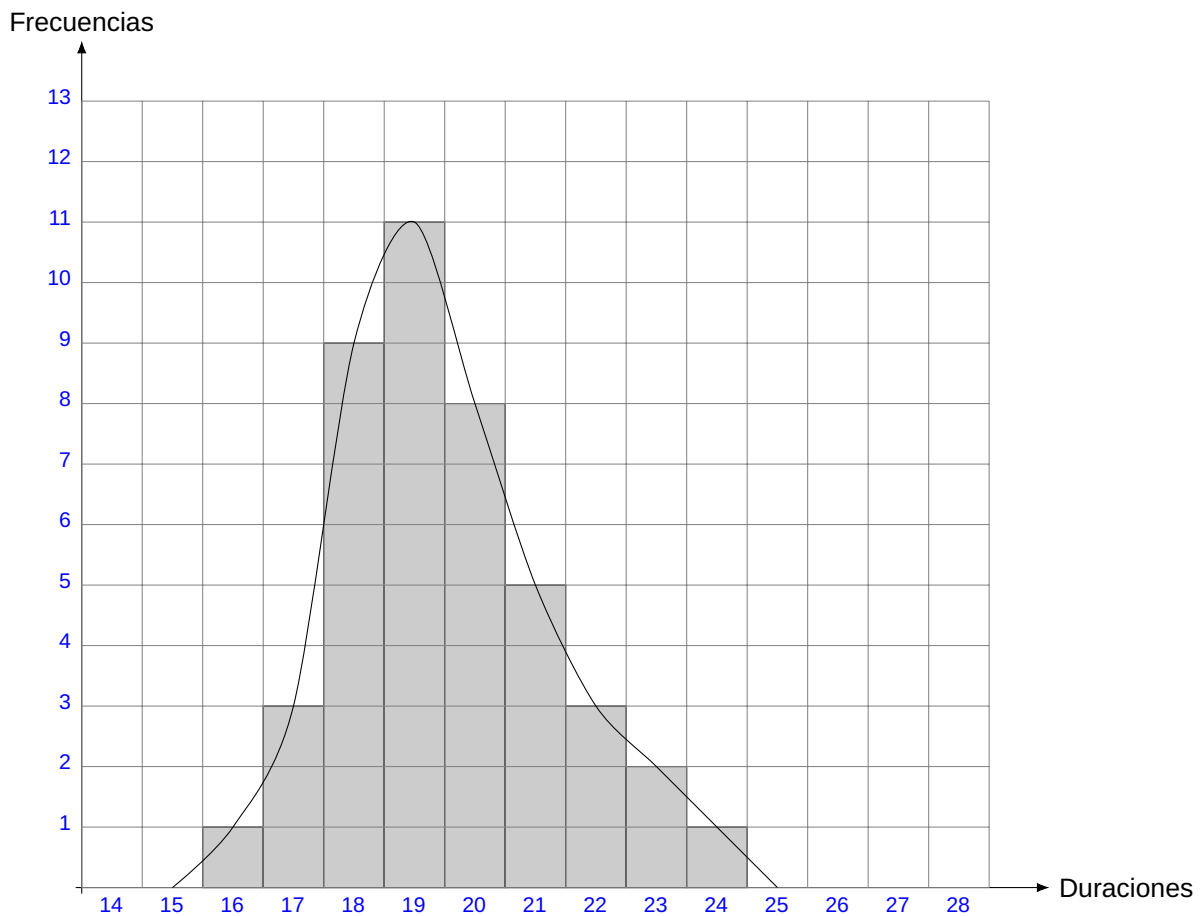
| | | | | | | | | | |
|--------------------|---|---|---|----|---|---|---|----|----|
| Duración (semanas) | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| Frecuencia | 1 | 3 | 9 | 11 | 8 | 5 | 3 | 2 | 1 |

Se pide:

1. Representar el histograma correspondiente calculando la media y la desviación típica en la distribución definida con estos datos.
2. Probabilidad de que la realización de esa actividad no sobrepase las 4 semanas, bajo las hipótesis siguientes :
 - a) Suponiendo una distribución normal ajustada a los parámetros obtenidos en (1)
 - b) Suponiendo la media y varianza muestral.

Solución

1. El histograma que se obtiene con los datos del cuadro es el que sigue:



La duración más optimista es $t_{opt} = 3$ semanas.

La duración más pesimista es $t_{pes} = 11$ semanas.

La duración más probable es $t_{prob} = 6$ semanas.

Por tanto, el valor medio esperable es:

$$\mu = \frac{3 + 11 + 4 \cdot 6}{6} = 6.33$$

Con una desviación típica de:

$$\sigma = \frac{11 - 3}{6} = 1.33$$

2. La probabilidad que se pide en el enunciado se obtiene del modo que sigue;

- a) En el primer caso hay que adoptar una distribución normal $N(6.33; 1.33)$. Si se hace el cambio de variable a la normal tipificada se tiene:

$$x = \frac{t - \mu}{\sigma} = \frac{4 - 6.33}{1.33} = -1.75$$

Para este valor se tiene en la tabla 1: $\Phi(x) = 1 - 0.9599 = 0.0401$. La probabilidad es por tanto: $P1 = 4,01\%$.

- b) En el segundo caso hay que calcular, con la muestra dada, los parámetros μ y σ :

| n_i | t_i | $t_i \times n_i$ | $t_i - \mu$ | $(t_i - \mu)^2$ | $n_i(t_i - \mu)^2$ |
|-------|-------|------------------|-------------|-----------------|--------------------|
| 1 | 3 | 3 | -3.5 | 12.25 | 12.25 |
| 3 | 4 | 3 | -2.5 | 6.25 | 18.75 |
| 9 | 5 | 3 | -1.5 | 2.25 | 20.25 |
| 11 | 6 | 3 | -0.5 | 0.25 | 2.75 |
| 8 | 7 | 3 | 0.5 | 0.25 | 2.00 |
| 5 | 8 | 3 | 1.5 | 2.25 | 11.25 |
| 3 | 9 | 3 | 2.5 | 6.25 | 18.75 |
| 2 | 10 | 3 | 3.5 | 12.25 | 24.50 |
| 1 | 11 | 3 | 4.5 | 20.25 | 20.25 |

Se tiene ahora:

$$\mu = \frac{\sum t_i \times n_i}{\sum n_i} = 6.5$$

Con este valor, calculando las desviaciones de la media y sus cuadrados obtenemos la varianza como:

$$\sigma^2 = \frac{\sum n_i (t_i - \mu)^2}{\sum n_i} = 3.0407 \rightarrow \sigma = 1.74$$

Considerando la distribución $N(6,50; 1,74)$ y tipificando la variable correspondiente:

$$x = \frac{4 - 6.50}{1.74} = -1.44$$

Para este valor se tiene en la tabla 1: $\Phi(x) = 1 - 0.9251 = 0.0749$. La probabilidad es por tanto: $P2 = 7.491\%$.

Ejercicio 3

Con los datos del cuadro adjunto, determinar:

1. Plazo (tiempo esperado) de ejecución de la obra.
2. Probabilidad de reducir este plazo en 3 semanas.
3. Probabilidad de poder comenzar la actividad I antes de 16 semanas.

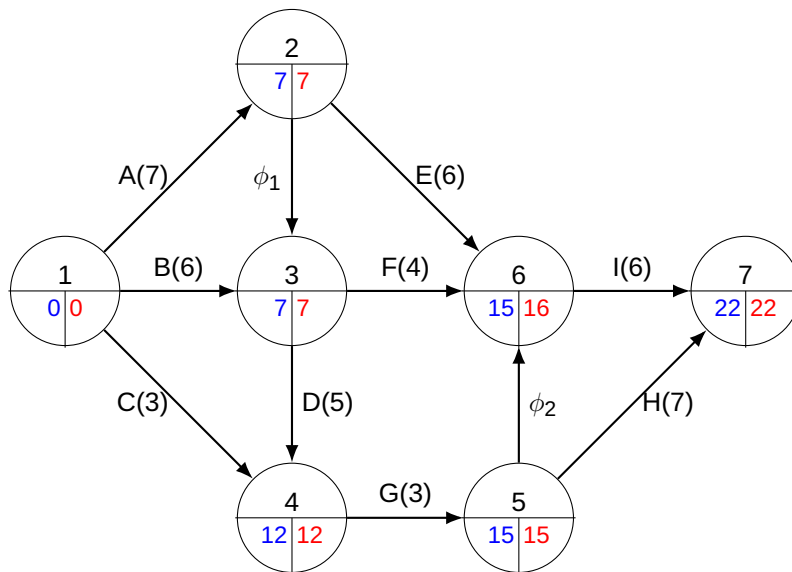
| Actividad | Duraciones | | | Precedencias |
|-----------|---------------------|------------------------|---------------------|--------------|
| | Optimista (t_1) | Más probable (t_p) | Pesimista (t_2) | |
| A | 1 | 8 | 9 | – |
| B | 4 | 5 | 12 | – |
| C | 1 | 3 | 5 | – |
| D | 3 | 5 | 7 | A, B |
| E | 1 | 5 | 15 | A |
| F | 2 | 4 | 6 | A, B |
| G | 2 | 3 | 4 | C, D |
| H | 3 | 6 | 15 | G |
| I | 2 | 5 | 14 | E, F, G |

Solución

1. Se determinan las medias de todas las actividades, y se resuelve el programa de la obra:

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|--------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu = \frac{t_1+t_2+4t_p}{6}$ | 7 | 6 | 3 | 6 | 6 | 4 | 3 | 7 | 6 |

Con las condiciones de precedencia y tiempos esperados de cada actividad, se define el grafo que sigue, con el que una vez determinadas las fechas de suceso se obtiene un plazo esperado $t=22$ semanas.



El camino crítico es el definido por las actividades: A-D-G-H. Las varianzas a considerar son, por tanto:

| | A | D | G | H |
|------------------------------|-------|-------|-------|-------|
| $\sigma = \frac{t_2-t_1}{6}$ | 1.778 | 0.444 | 0.111 | 4.000 |

2. Probabilidad de terminar 3 semanas antes. Los parámetros de la normal que define el programa anterior son: $\mu = 22$, y $\sigma = 2.517$. Tipificando la variable:

$$x = \frac{t - 22}{2.517} = -1.19$$

En la tabla 1 se tiene que $\Phi(1.19) = 0.8830$, por lo que $\Phi(-1.19) = 1 - 0.8830 = 0.1170$. La probabilidad es por tanto: $P(19 \text{ semanas}) = 11.70\%$.

3. Probabilidad de comenzar la actividad I antes de 16 semanas. Se toma la serie de actividades más larga que llega a I: A, D, G. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned}\mu &= \mu_A + \mu_D + \mu_G = 7 + 5 + 3 = 15 \\ \sigma^2 &= \sigma_A^2 + \sigma_D^2 + \sigma_G^2 = 1.778 + 0.444 + 0.111 = 2.333 \rightarrow \sigma = 1.527\end{aligned}$$

La variable tipificada es en este caso:

$$x = \frac{t - 15}{1.527} = 0.65$$

para cuyo valor se obtiene en la tabla 1 : $\Phi(0.65) = 0,7422$, luego $P(16 \text{ semanas}) = 74,22\%$

Referencias

- [1] H. Kerzner. *Project Management: A Systems Approach to Planning, Scheduling, and Controlling*. Wiley, 2025. ISBN: 9781394290031. URL: <https://books.google.es/books?id=JR1HEQAAQBAJ>.
- [2] David R. Pierce. *Project scheduling and management for construction*. eng. Fourth edition. RSMears ; v.89. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2013. ISBN: 9781118417171.
- [3] Erik Leuven Demeulemeester y Willy S Herroelen. *Project scheduling*. en. International Series in Operations Research & Management Science. New York, NY: Springer, abr. de 2013.

